

II-11

長周期湾水振動について

北見工業大学 大学院○学生員 野村 圭司
 北海道東海大学 大学院 古田 泰久
 北海道東海大学 工学部 正員 濱中建一郎

1. はじめに

これまでに港湾において長周期自由波の発生原因は港口部での長周期拘束波の不連続性を補うことによって生じると仮定されてきた。特に、Bowers(1977)によって非線形の効果が示された。さらに、Wu and Liu (1990)は Bowers(1977)の理論を基に矩形港湾に拡張し、multiple-scale 摂動法を用いて同様の結果を得ている。Bowersの解析では港口部の接続条件を満足していない不完全な線形解を用いている。しかしながら、線形波は連続であり水面の境界条件での強制項(非斉次項)も同様に連続であるべきである。したがって、港口部に渡って拘束波が不連続性を持つことは物理的な理由を持たない。Wu and Liu の場合 first variables を slow variables から区別して、長波に対する散乱波の影響を無視して考えている。散乱波による強制項は空間において first variables の関数で、また時間に関して slow variables の関数である。それ故にそれら影響は無視されるべきではない。

このことから本研究では、摂動法を用いて Bowers の問題をさらに正確な方法で再度解析を行い拘束波の不連続性について調べた。

2. 基礎方程式と摂動展開

今、計算領域として Bowers(1977)と同様に簡単な共鳴水路 (Figure1) を考える。領域 I、II とともに水深は一定で、流体運動は非圧縮、非粘性、非回転とすると速度ポテンシャルを仮定することができる。よって、基礎方程式と境界条件は以下のように表せる。

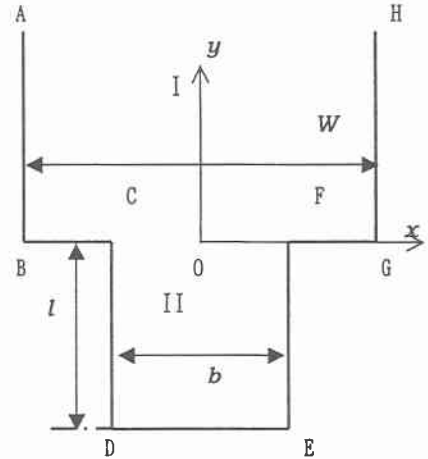


Figure 1 Schematic diagram of the channel

$$\Delta\Phi = 0 \tag{2.1}$$

$$\Phi_x = \eta_t + \nabla\eta \cdot \nabla\Phi \text{ on } z = \eta \tag{2.2}$$

$$\Phi_t + g\eta + \frac{1}{2} \{ (\nabla\Phi)^2 + \Phi_x^2 \} = 0 \text{ on } z = \eta \tag{2.3}$$

$$\Phi_x = 0 \text{ on } Z = -h \tag{2.4}$$

$$\Phi_y = 0 \text{ on the side-walls} \tag{2.5}$$

ここで $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)$ 、

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$$

η は水面変位、 ν は水路側壁に対する法線微分を表す。水面の境界条件式(2.2)、(2.3)の非線形性を考慮するために摂動法を用いて解析する。

$$\Phi = \epsilon\Phi^{(1)} + \epsilon^2\Phi^{(2)} + \dots \tag{2.6}$$

$$\eta = \epsilon\eta^{(1)} + \epsilon^2\eta^{(2)} + \dots \tag{2.7}$$

(2.6)、(2.7)を(2.1)~(2.5)式に代入して整理すると $\Phi^{(n)}$ 、 $\eta^{(n)}$ に対する基礎方程式と境界条件が

得られる。

ε の1次のオーダーでは

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

$$\Phi_z^{(1)} = \eta_t^{(1)} \quad \text{on } z=0 \quad (2.9)$$

$$\Phi_x^{(1)} + g\eta^{(1)} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (2.10)$$

$$\Phi_z^{(1)} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (2.11)$$

$$\Phi_v^{(1)} = 0 \quad \text{on the side walls} \quad (2.12)$$

ε の2次のオーダーでは

$$\Delta\Phi^{(2)} = 0 \quad (2.13)$$

$$\Phi_z^{(2)} - \eta_t^{(2)} = -\eta^{(1)}\Phi_{zz}^{(1)} + \nabla\eta^{(1)} \cdot \nabla\Phi^{(1)} \quad \text{on } z=0 \quad (2.14)$$

$$\Phi_t^{(2)} + g\eta^{(2)} = -\eta^{(1)}\Phi_a^{(1)} - \frac{1}{2}\{(\nabla\Phi^{(1)})^2 + (\Phi_z^{(1)})^2\} \quad \text{on } z=0 \quad (2.15)$$

$$\Phi_x^{(2)} = 0 \quad \text{on } z=-h \quad (2.16)$$

$$\Phi_v^{(2)} = 0 \quad \text{on the side walls} \quad (2.17)$$

3. 1次解

角周波数 ω の入射波に対して $\Phi^{(1)}$ と $\eta^{(1)}$ を以下の様に仮定することができる

$$\Phi^{(1)} = i\frac{g}{\omega}f(x,y)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.1)$$

$$\eta^{(1)} = f(x,y)e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.2)$$

ここで $c.c.$ は共役複素数を示す。

(3.1)と(3.2)式は(2.9)~(2.11)式と以下の分散関係式を満足する

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.3)$$

(2.8)式に(3.1)式を代入すると $f(x,y)$ に関する

以下のHelmholtz方程式が得られる

$$f_{xx} + f_{yy} + k^2f = 0 \quad (3.4)$$

よって、側壁の境界条件(2.12)式を満たす上式の解を求める。

幅広水路 (領域 I)

入射波(振幅 a)は狭い水路の口部(CF)に直角入射するものとし、広い水路の分布関数 f は Bowersの解析に類似した以下の式で仮定する。

$$f = a \left[\cos ky + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) e^{-\alpha_n y} \right] \quad (3.5)$$

ここで、第1項は入射波を示す。

また、(3.5)式を(3.4)式に代入すると以下の式を得る。

$$\alpha_n = \sqrt{(2n\pi/W)^2 - k^2} \quad (3.6)$$

幅狭水路 (領域 II)

(3.5)式と同様に狭い水路の分布関数 f は

$$f = a \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \cosh \beta_n (y+l) \quad (3.7)$$

ここで、

$$\beta_n = \sqrt{(2n\pi/b)^2 - k^2} \quad (3.8)$$

(3.5)と(3.7)式はそれぞれの領域に対し側壁の境界条件を満足する。 A_n と B_n の決定法は、 $y=0$

の x 軸に沿った境界条件と接続条件を用いる。

領域 I と II との接続部の分布関数 f の接続条件より

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \cosh \beta_n l \quad \text{on } |x| \leq b/2$$

y 方向の法線微分の接続条件は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} -\alpha_n A_n \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2}\right) \\ & = 0 \quad \text{on } \frac{b}{2} < |x| \leq \frac{W}{2} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n B_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left(x + \frac{b}{2}\right) \sinh \beta_n l \quad \text{on } |x| \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

次に、Figure 2に示した $y=0$ の x 軸に沿って適当に点を選び(選点)、その点に対して(3.9)、(3.10)式を適用する。

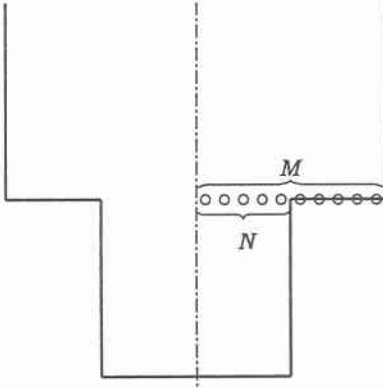


Figure 2 Matching points

選点の総数は広い水路で M 個、狭い水路で N 個となり、それぞれについて(3.9)、(3.10)式を適用する。よって、未知数 A_n 、 B_n の数と式の数が一致して連立して解くことができる。

4. 2次の解

ここでは入射波を角周波数 ω_1 と ω_2 (ω_1 と ω_2 はわずかな差を持つように与える) の2成分波として考える。また、1次のオーダのポテンシャルと水面変位を以下の式で示す。

$$\Phi^{(1)} = \phi_1 e^{i\omega_1 t} + \phi_2 e^{i\omega_2 t} + c.c. \quad (4.1)$$

$$\eta^{(1)} = f_1 e^{i\omega_1 t} + f_2 e^{i\omega_2 t} + c.c. \quad (4.2)$$

ここで、

$$\phi_j = i \frac{g}{\omega_j} f_j \frac{\cosh k_j(z+h)}{\cosh k_j h} \quad (j=1,2),$$

$$\omega_j^2 = gk_j \tanh k_j h \quad (j=1,2)$$

とする。

水面の境界条件(2.14)、(2.15)式の強制項から異なる成分の角周波数を生じるが、ここでは長周期成分に関わる差の角周波数 $\omega_1 - \omega_2$ だけに着目する。

この角周波数による拘束波は

$$\Phi^{(2)} = \phi^{(2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. \quad (4.3)$$

$$\eta^{(2)} = \zeta^{(2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. \quad (4.4)$$

となる。

これら (4.1)、(4.2)、(4.3)そして(4.4)式を

2次のオーダの水面の境界条件(2.14)、(2.15)式に代入して整理すると

$$g\phi_x^{(2)} - (\omega_1 - \omega_2)\phi^{(2)} = G_1 f_1 \bar{f}_2 + G_2 \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{f}_2 \quad (4.5)$$

となる。ここで \bar{f}_2 は f_2 の共役複素数を示す。

また、

$$G_1 = i \left\{ -g^2 \left(\frac{k_1^2}{\omega_1} - \frac{k_2^2}{\omega_2} \right) + (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1^2 - \omega_1 \omega_2 + \omega_2^2) \right\}$$

$$G_2 = 2ig^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right)$$

次にラプラス方程式(2.3)と、水面と底面の境界条件(4.5)、(2.16)式を満たす拘束波の速度ポテンシャルを求める。(4.5)式の右辺の水平分布関数を考慮すると f_1 と f_2 を代入することで拘束波の速度ポテンシャルを得る。

幅広水路 (領域 I)

$$\phi^{(2)} =$$

$$a_1 a_2 \left[C_1 \cos(k_1 + k_2)y \frac{\cosh \gamma_1(z+h)}{\cosh \gamma_1 h} \right.$$

$$+ C_2 \cos(k_1 - k_2)y \frac{\cosh \gamma_2(z+h)}{\cosh \gamma_2 h}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_3 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-(\alpha_{2,n} - i k_2)y} \frac{\cosh \gamma_3(z+h)}{\cosh \gamma_3 h}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_4 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-(\alpha_{2,n} + i k_2)y} \frac{\cosh \gamma_4(z+h)}{\cosh \gamma_4 h}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_5 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-(\alpha_{1,n} - i k_2)y} \frac{\cosh \gamma_5(z+h)}{\cosh \gamma_5 h}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_6 \cos \frac{2n\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-(\alpha_{1,n} + i k_2)y} \frac{\cosh \gamma_6(z+h)}{\cosh \gamma_6 h}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_7 \cos \frac{2(m+n)\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-(\alpha_{1,m} + \alpha_{2,n})y} \frac{\cosh \gamma_7(z+h)}{\cosh \gamma_7 h}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_8 \cos \frac{2(m-n)\pi}{W} \left(x + \frac{W}{2} \right) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)y} \frac{\cosh \gamma_8(z+h)}{\cosh \gamma_8 h} \Big] \quad (4.6)$$

ここで、

$$C_j = \frac{F_j}{g\gamma_j \tanh \gamma_j h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (j=1 \sim 8)$$

F_j は(4.5)の強制項の関数形から決まり、 γ_j はラプラス方程式から決まる。

幅狭水路 (領域 II)

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & \frac{a_1 a_2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cosh(\theta_3 + \theta_4) \frac{\cosh \lambda_1(z+h)}{\cosh \lambda_1 h} \right. \\ & + D_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cosh(\theta_3 - \theta_4) \frac{\cosh \lambda_2(z+h)}{\cosh \lambda_2 h} \\ & + D_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cosh(\theta_3 + \theta_4) \frac{\cosh \lambda_3(z+h)}{\cosh \lambda_3 h} \\ & \left. + D_4 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cosh(\theta_3 - \theta_4) \frac{\cosh \lambda_4(z+h)}{\cosh \lambda_4 h} \right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

ここで、

$$D_j = \frac{H_j}{g\lambda_j \tanh \lambda_j h - (\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (j=1 \sim 4)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi(m+n)(x+b/2)/b$$

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi(m-n)(x+b/2)/b$$

$$\theta_3 + \theta_4 = (\beta_{1,m} + \bar{\beta}_{2,m})(y+l)$$

$$\theta_3 - \theta_4 = (\beta_{1,m} - \bar{\beta}_{2,m})(y+l)$$

H_j は(4.5)の強制項の関数形から決まり、 λ_j はラプラス方程式から決まる。

5. 数値解析

最初に得られた線形解を用いて水面波形を求めた。その結果を境界要素法で求めた水面波形と比較し一致することを確かめた。

次に、figure 3 に(4.5)の右辺で表される強制項の水路口とその外側の側壁上での値を示す。展

開項数を変えても安定して水路口で連続している。Figure 4は(4.6)、(4.7)で示される拘束波の速度ポテンシャルの水路口とその外側での値($z=0$)を示す。さらに figure 5は同じ位置での速度ポテンシャルの法線微分を示す。この結果から拘束波は水路口で不連続となっているように見える。しかしながら、法線微分は水路口の外側の側壁で零とならず不透過条件を満たしていない。他の側壁では解の形から明らかに不透過条件を満たしている。水路口の外側の側壁と他の側壁とは物理的にならぬ違いはないからこの結果は認めがたい。

この結果の原因を考えるために線形解の水路口での様子を詳細に調べた。Figure 6と figure 7は線形解のポテンシャルと法線微分を選点の間も細かく描いた図である。これによればポテンシャルは水路口で滑らかに接続しているが法線微分は選点以外では不連続である。さらに、水路口の外側の側壁では選点上では境界条件を満たしているがそれ以外では大きく変動し境界条件を満たしていない。従って、この線形解は不完全であり、この解を用いて得られた拘束波の不連続性は物理的に意味を持たない。この変動はフーリエ解析におけるギプスの現象と思われ、展開項数を増やしても解消されない。

6. 結論

高次の自由波の発生の根拠とされている拘束波の不連続性について調べた。その結果、不連続性には線形解におけるギプスの現象の影響が強くあるものと思われる。解の表記にフーリエ級数を用いる限りこの現象を避ける事は出来ない。従って、拘束波に不連続性が存在するか、しないかを確かめるには他の解析方法を開発する必要がある。

参考文献

- Bowers, E. C. (1977), "Harbour resonance due to set-down beneath wave groups", J. Fluid Mech., Vol.79, pp71-92
- Wu, J.-K. and L.-F. Liu (1990), "Harbour excitations by incident wave groups", J. Fluid Mech., Vol.217, pp595-613

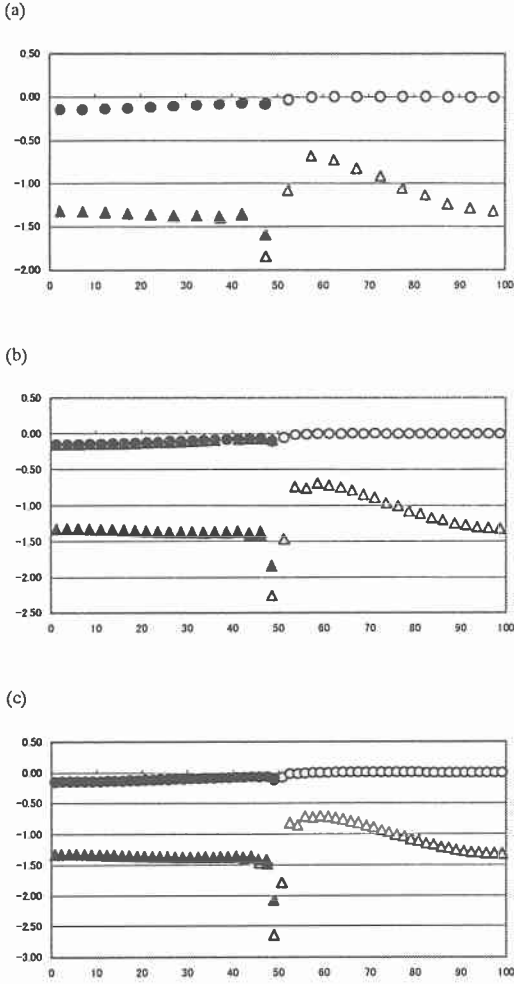


Figure 3 The forcing term of (4.5)
 Real part : \circ (Region I), \bullet (Region II)
 Imaginary part : \triangle (Region I), \blacktriangle (Region II)
 (a): $M = 20, N = 10$
 (b): $M = 40, N = 20$
 (c): $M = 60, N = 30$

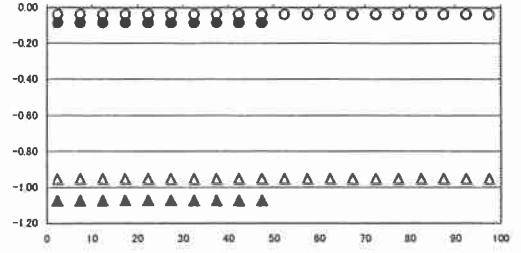


Figure 4 The velocity potential of the forced waves
 Real part : \circ (Region I), \bullet (Region II)
 Imaginary part : \triangle (Region I), \blacktriangle (Region II)

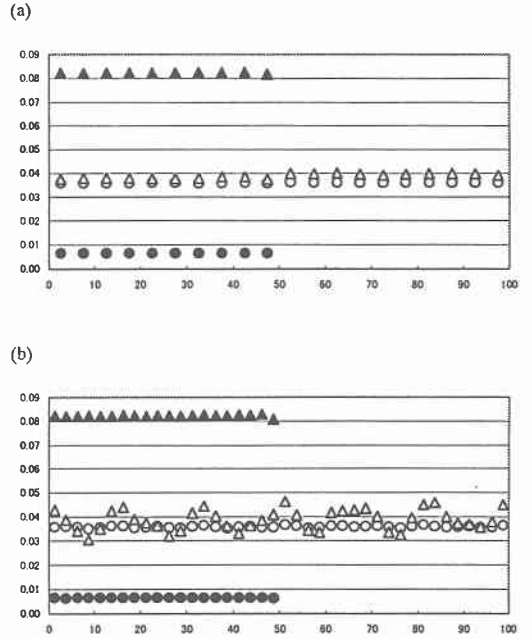


Figure 5 The normal derivative of the forced waves
 Real part : \circ (Region I), \bullet (Region II)
 Imaginary part : \triangle (Region I), \blacktriangle (Region II)
 (a): $M = 20, N = 10$, (b): $M = 40, N = 20$,

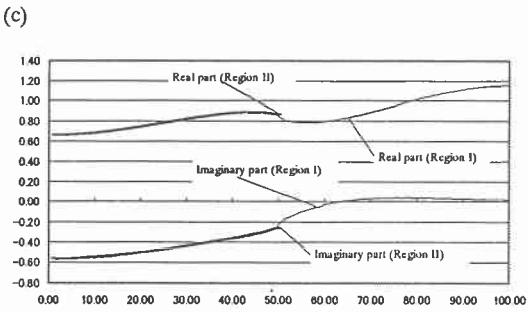
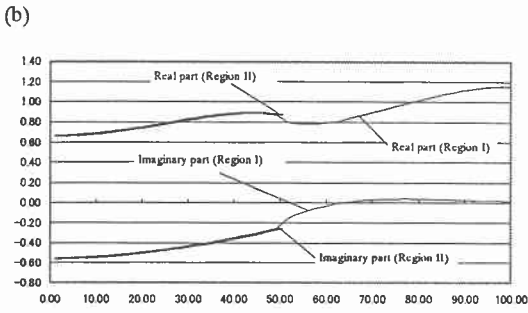
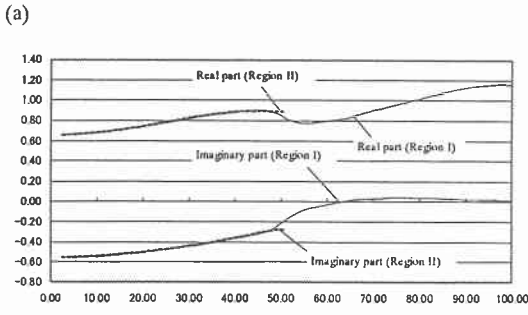


Figure 6 The velocity potential of linear waves

(a): $M = 20, N = 10$

(b): $M = 40, N = 20$

(c): $M = 60, N = 30$

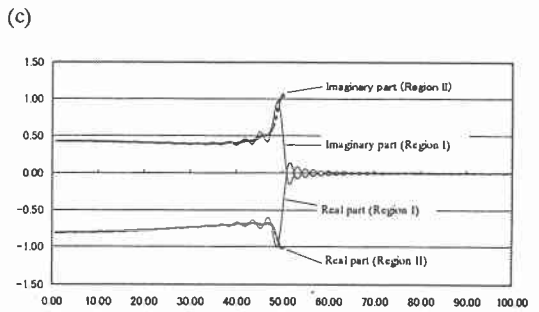
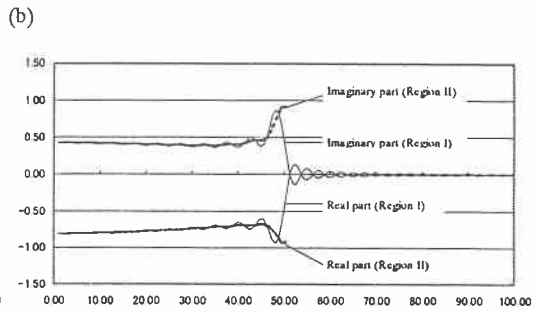
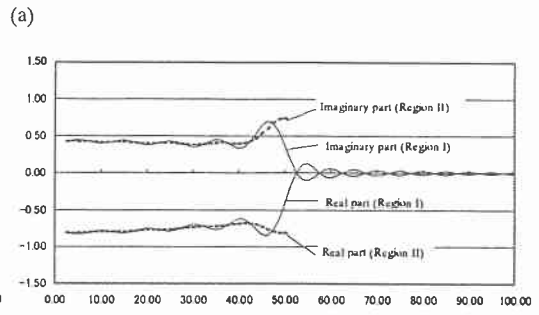


Figure 7 The normal derivative of linear waves

(a): $M = 20, N = 10$

(b): $M = 40, N = 20$

(c): $M = 60, N = 30$