

II-2

ステップ状海底地形で発生する自由波の波向について

北見工業大学工学部 ○学生員 勝井 彰子
 北見工業大学大学院 学生員 大橋 正臣
 北見工業大学工学部 正会員 佐藤 幸雄
 北海道東海大学工学部 正会員 濱中 建一郎

はじめに

港湾内に停泊している船舶が船体動揺を起こすメカニズムは、基本的には港湾内の副振動による湾水振動と共振によるものと考えられる。この現象を発生させる原因は長周期自由波にあると考えられる。現在の所、港内、港外のいずれにおいても発生する可能性が考えられている。港外で自由波が発生するものとして、合田、岡崎 (1998) はステップ状海底地形をあげ、そこに1成分波が通過する際、波の非線形干渉により基本周波数の整数倍の周波数を持つ自由波が発生することを示した。また、古田 (1998) 等は長周期波で汀線に平行に港内に入射する場合に湾水振動が起こることを示している。このことから本研究では、3次元で摂動法を用い、2成分波の自由波のうち長周期自由波となるものの解析を行い、入射波をステップに対して角度を持たせることにより自由波の波向きが決まり、その波向きがステップに対して平行に進む自由波が発生する場合がある事を示す。

1. 1次オーダー

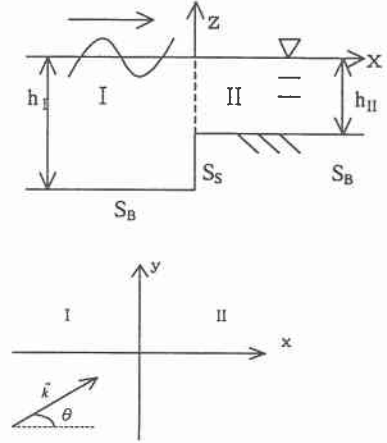
入射側を領域 I、透過側を領域 II とし、下図のような座標系で考える。1 次オーダーの速度ポテンシャルを $\Phi^{(1)}$ とすると基礎方程式と境界条件は以下のように表せる。

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{on } z = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \begin{cases} z = -h_I \\ z = -h_{II} \end{cases} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad \text{on } S_S \tag{4}$$



(1)~(3)式を満たす 1 次オーダーの速度ポテンシャルは以下ようになる。

(領域 I)

$$\Phi_I^{(1)} = i \frac{a}{2} \frac{g}{\omega} e^{i\alpha x} e^{-i\beta y} \left\{ \left(e^{-i\kappa_1 x} + C_R e^{i\kappa_1 x} \right) \frac{\cosh k_I (z + h_I)}{\cosh k_I h_I} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{In} e^{\sigma_{In} x} \frac{\cos k_{In} (z + h_I)}{\cos k_{In} h_I} \right\} + \text{c.c.} \tag{5}$$

$$\omega^2 = g k_I \tanh k_I h_I \quad \kappa_1^2 = k_I^2 - \lambda^2$$

(領域 II)

$$\Phi_{II} = i \frac{a}{2} \frac{g}{\omega} e^{i\alpha x} e^{-i\beta y} \left\{ C_T e^{-i\kappa_1 x} \frac{\cosh k_{II} (z + h_{II})}{\cosh k_{II} h_{II}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{II n} e^{-\sigma_{II n} x} \frac{\cos k_{II n} (z + h_{II})}{\cos k_{II n} h_{II}} \right\} + \text{c.c.} \tag{6}$$

$$\omega^2 = k_{II n} \tan k_{II n} h_{II} \quad \sigma_{II n} = \sqrt{k_{II n}^2 - \lambda^2}$$

Wave direction of high-order free waves over submerged step
 by Akiko KATSUI, Masami OHASHI, Yukio SATO and Ken-ichiro HAMANAKA

ここで透過波の y 方向の波数 λ が入射波の y 方向の波数と一致する理由は、透過波は入射波より発生し接続境界 $x=0$ で y 方向には同じ波長を持たなければならないからである。

ここで、 C_R 、 C_T は反射率、透過率であり、(4)式と接続条件を満たすものとする。

2. 2次オーダー(1成分波)

1成分の波が入射する事を考えると2次オーダーの速度ポテンシャルは以下のように仮定できる。

$$\Phi^{(2)} = \phi^{(2)} e^{2i\omega t} + \phi^{(2)} + c.c.$$

2倍周波数成分の基礎方程式と境界条件は以下ようになる。

$$\Delta\phi^{(2)} = 0 \quad (7)$$

$$g \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} - 4\omega^2 \phi^{(2)} = i\omega\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{2i\omega^3}{g} \phi^{(1)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} - 2i\omega \left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - i\omega \left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - 2i\omega \left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \quad \text{on } z=0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{on } \begin{cases} z = -h_I \\ z = -h_{II} \end{cases} \quad (9)$$

$$\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad \text{on } S_5 \quad (10)$$

となり、(7)~(9)式の解である拘束波は

$$\phi^2 = \sum_{n=\alpha}^{\infty} \sum_{m=\alpha}^{\infty} D_{nm} e^{-2i\lambda y} e^{i(\kappa_n + \kappa_m)x} \frac{\cosh v_{nm}(z+h)}{\cosh v_{nm}h} \quad (11)$$

$$v_{nm} = \sqrt{(2\lambda)^2 + (\kappa_n + \kappa_m)^2}$$

$$D_{nm} = \frac{ia^2 g^2 B_n B_m \left(-\mu_n^2 + 3\frac{\omega^4}{g^2} - 2\kappa_n \kappa_m - 2\lambda^2 \right)}{4\omega^2 g v_{nm} \tanh v_{nm} - 4\omega^2}$$

ここで、領域 I の拘束波は $\alpha=0$ とし、係数 B_n 、 κ_n 、 k_n は、1次オーダーのポテンシャル ϕ の係数から

$$\kappa_{10} = -\kappa_1, \quad \kappa_{11} = \kappa_1, \quad \kappa_{12} = -i\sigma_{11}, \quad \dots$$

$$B_{10} = 1, \quad B_{11} = C_R, \quad B_{12} = A_{11}, \quad \dots$$

$$\mu_{10} = k_1, \quad \mu_{11} = k_1, \quad \mu_{12} = -ik_1, \quad \dots$$

また、領域 II では $\alpha=1$

$$\kappa_{11} = -\kappa_{11}, \quad \kappa_{12} = i\sigma_{11}, \quad \kappa_{13} = i\sigma_{12}, \quad \dots$$

$$B_{11} = C_R, \quad B_{12} = A_{11}, \quad B_{13} = A_{12}, \quad \dots$$

$$\mu_{11} = k_{11}, \quad \mu_{12} = ik_{11}, \quad \mu_{13} = ik_{12}, \quad \dots$$

とした。

2次オーダーの拘束波は未だ(10)式と接続条件

$$\phi_1^{(2)} = \phi_{11}^{(2)}, \quad \frac{\partial\phi_1^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial\phi_{11}^{(2)}}{\partial x} \quad -h_{II} \geq z \geq 0$$

を満足していない。この差を補償するものとして、x 方向の正負両方向へ自由波が発生する。

自由波 (Φ_F) は、領域 I, II それぞれで次のようになる。

2倍周波数の自由波の速度ポテンシャルは

$$\Phi_{F I} = i \frac{a^2 g}{2\omega} e^{-i\lambda_F y} \left\{ E_0 e^{ik_F x} \frac{\cosh k_{F I} (z+h_I)}{\cosh k_{F I} h_I} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\sigma_{1n} x} \frac{\cos \xi_{1n} (z+h_I)}{\cos \xi_{1n} h_I} \right\} e^{i2\omega t} \quad (12)$$

$$\Phi_{F II} = i \frac{a^2 g}{2\omega} e^{i\lambda_F y} \left\{ F_0 e^{-ik_F x} \frac{\cosh k_{II} (z+h_{II})}{\cosh k_{II} h_{II}} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\sigma_{II n} x} \frac{\cos \xi_{II n} (z+h_{II})}{\cos \xi_{II n} h_{II}} \right\} e^{i2\omega t} \quad (13)$$

ここで

$$(2\omega^2) = g k_{F I} \tanh k_{F I} h_I = -g \xi_{1n} \tan \xi_{1n} h_I$$

$$(2\omega^2) = g k_{F II} \tanh k_{F II} h_{II} = -g \xi_{II n} \tan \xi_{II n} h_{II}$$

2次オーダーの速度ポテンシャルは全体(拘束波と自由波)で接続されているから、自由波の y 方向の波数 λ_F は拘束波の波数 2λ と一致しなければならない。そして、自由波の x 方向の波数 κ は、拘束波の y 方向の波数 2λ と自由波の分散関係式により以下のように決まる。

$$k_F^2 = \kappa_F^2 + 4\lambda^2 \quad \text{よって} \quad \kappa_F = \pm \sqrt{k_F^2 - 4\lambda^2}$$

特に $k_F > 2\lambda$ のとき、自由波はステップの形状により発生するものであるからステップから離れる方向に進行する波となることを意味している。また、 $k_F < 2\lambda$ のとき、自由波としてステップから離れる方向に減衰していく減衰波となることを示す。次に拘束波の 2λ が最大(入射角が 90°) の場合で、 2λ と k_F の関係を図に示す。

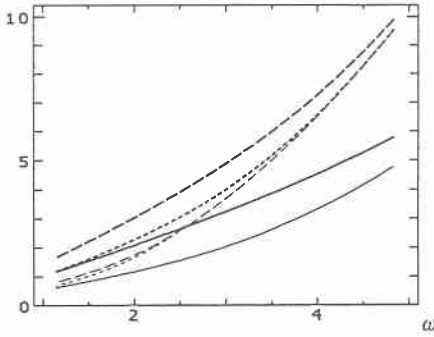


図1. 入射周波数の変化に伴う自由波波数

実線は 2λ 、点線は領域Iの波数 k_{FI} 、破線は領域IIの波数 k_{FII} である。太線は $h_I=0.4\text{m}$ 、 $h_{II}=0.2\text{m}$ で細線は $h_I=5.0\text{m}$ 、 $h_{II}=1.0\text{m}$ である。周波数が変化しても 2λ を下回る波数はなく、倍周波数成分の自由波は常に進行性の自由波であるといえる。

3. 2次オーダー(2成分波)

次に2成分波を考える。1次オーダーの解を2次の水面条件に代入することを考慮すると、 $\Phi^{(2)}$ は定常項と以下に示す強制項の時間関数(周波数成分)となる。

$$e^{2i\omega_1 t}, e^{-2i\omega_1 t}, e^{2i\omega_2 t}, e^{-2i\omega_2 t}, e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}, e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}, e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}, e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}$$

ここで、 ω_1, ω_2 は1,2成分目の入射波の角周波数であり、以後添え字1,2は入射波の成分を表す。これらの周波数成分は独立に水面条件を満たす解として得られる。長周期波は $e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$ の成分によって表される。この水面条件は

$$\begin{aligned} & -(\omega_1 - \omega_2)^2 \phi^{(2)} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = i\omega_1 \phi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \overline{\phi_2^{(1)}}}{\partial z^2} \\ & -i\omega_2 \overline{\phi_2^{(1)}} \frac{\partial^2 \phi_1^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{i}{g} \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \\ & \times \left\{ \phi_1^{(1)} \frac{\partial \overline{\phi_2^{(1)}}}{\partial z} + \overline{\phi_2^{(1)}} \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z} \right\} - i(\omega_1 - \omega_2) \left\{ 2 \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi_2^{(1)}}}{\partial x} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \overline{\phi_2^{(1)}}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \overline{\phi_2^{(1)}}}{\partial z} \right\} \quad \text{on } z=0 \quad (14) \end{aligned}$$

他の条件は(7)、(9)、(10)式となる。これらの解である2次の拘束波は以下ようになる。

$$\phi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{-i(\lambda_1 \lambda_2) y} e^{i(\kappa_{1n} \kappa_{2m}) x} \frac{\cosh v_{nm}(z+h)}{\cosh v_{nm} h} \quad (15)$$

$$v_{nm} = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\kappa_{1n} - \kappa_{2m})^2}$$

$$C_{nm} = \frac{ia_1 a_2 g^2}{4\omega_1 \omega_2} \frac{D_{nm} B_{1n} \overline{B_{2m}}}{g v_{nm} \tanh v_{nm} h - (\omega_1 - \omega_2)^2}$$

$$\begin{aligned} D_{nm} = & \omega_1 (\mu_{2m})^2 - \omega_2 (\mu_{1n})^2 + \frac{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) (\omega_1^2 + \omega_2^2)}{g^2} \\ & + (\omega_2 - \omega_1) \left(2\kappa_{1n} \kappa_{2m} + 2\lambda_1 \lambda_2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{g^2} \right) \end{aligned}$$

ここで、領域Iでは $\alpha=0$ 、領域IIでは $\alpha=1$ で、(11)式と同様の係数を用いる。

この長周期拘束波も1成分波の時と同様に接続条件とステップ前面の境界条件(10)式を満たしていない。よって、長周期自由波として以下の波が発生する。

$$\begin{aligned} \Phi_{FI} = & i \frac{a_1 a_2 g}{(\omega_1 - \omega_2)} e^{-i\lambda_F y} \left\{ E_0 e^{i\kappa_{F1} x} \frac{\cosh k_I(z+h_I)}{\cosh k_I h_I} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\sigma_{1n} x} \frac{\cos \xi_{1n}(z+h_I)}{\cos \xi_{1n} h_I} \right\} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{FII} = & i \frac{a_1 a_2 g}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\lambda_F y} \left\{ F_0 e^{-i\kappa_{FII} x} \frac{\cosh k_{II}(z+h_{II})}{\cosh k_{II} h_{II}} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\sigma_{II n} x} \frac{\cos \xi_{II n}(z+h_{II})}{\cos \xi_{II n} h_{II}} \right\} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (17) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega_2)^2 = & g k_I \tanh k_I h_I = -g \xi_{I n} \tan \xi_{I n} h_I \\ (\omega_1 - \omega_2)^2 = & g k_{II} \tanh k_{II} h_{II} = -g \xi_{II n} \tan \xi_{II n} h_{II} \end{aligned}$$

自由波のx方向の波数 κ は、倍周波数の自由波の時と同様、自由波の分散関係式と拘束波のy方向の波数によって決まる。この場合、拘束波のy方向の波数は $\lambda_1 - \lambda_2$ であり、y方向の入射波数の一方が正で、もう一方が負の時には非常に大きな波数になり、減衰性の自由波になる場合がある。次に2つの入射角の変化による自由波の進行性の有無について議論する。

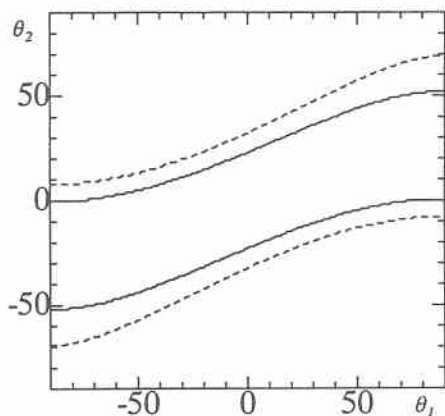


図 2-1

($T_1=2.0\text{sec}$, $T_2=1.0\text{sec}$, $h_1=0.4\text{m}$, $h_2=0.2\text{m}$)

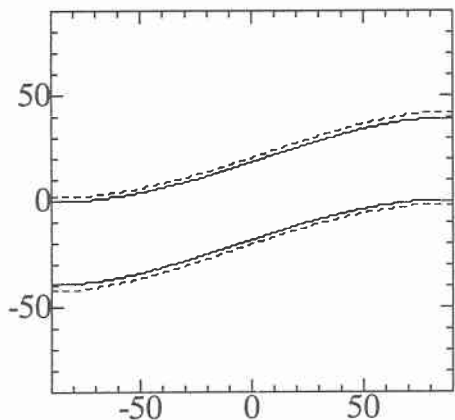


図 2-2

($T_1=2.0\text{sec}$, $T_2=1.0\text{sec}$, $h_1=0.8\text{m}$, $h_2=0.6\text{m}$)

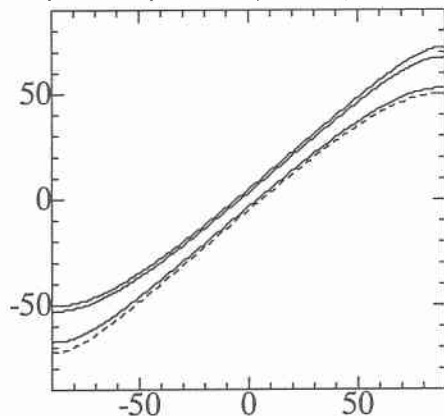


図 2-3

($T_1=1.1\text{sec}$, $T_2=1.0\text{sec}$, $h_1=0.4\text{m}$, $h_2=0.2\text{m}$)

図 2 は、2つの入射角の変化に対する進行性自由波の範囲であり、横軸は 1 成分目の入射角 θ_1 で縦軸は 2 成分目の入射角 θ_2 である。実線と実線との領域は領域 I で進行性の自由波となる範囲で、破線と破線の間は領域 II のそれである。

図 2-1 と図 2-2 は 2 つの入射周期は等しく、水深が異なっていることから、水深の影響により進行性自由波の発生範囲が変化することが分かる。また、破線と実線との範囲は深い領域 I では減衰性で、水深が浅い領域 II では進行性となっていることが分かる。図 2-3 は入射周期を長周期自由波になるようにしたもので、このときの自由波の周期は 1.1 秒で、範囲は狭いが進行性の自由波となる部分が存在する。また、線上は進行性と減衰性の境目で、波向きとしてはステップに対して平行に進む波であることが分かる。

まとめ

- 倍周波数成分の自由波は常に進行性の自由波となっている。
- 長周期自由波が進行性を持つためには、水深、入射角、入射周期等によって変わり、進行性と減衰性の境目はステップに対して平行に進行する波となっている。
- 今後の課題として、ステップに平行に進行する自由波の振幅などを明らかにする必要があると思われる。

参考文献

- 合田良実・岡崎健一(1998): 矩形ステップ上の非線形波浪干渉と碎波限界、海岸工学論文集第 45 巻、pp.46~50
- 古田泰久・野村圭司・濱中健一郎(1998): 境界要素法による苫小牧東港の湧水振動解析、海洋開発論文集 Vol.14、pp.167~172