

I - 55

動的解析における水中浮遊式トンネルと等価な弾性床上梁モデルの検討

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 佐藤 太裕

北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆

北海学園大学工学部 正 員 佐々木康彦

1. はじめに

水中浮遊式トンネルは、浮力を有するチューブ状のトンネル本体を、係留索(テンションレグ)により海中に安定化させた新規渡海構造物であり、フィヨルドのような大水深域や、橋梁、橋脚などの海上・海中障害物を極力減らしたい海域での渡海手段として期待されている^{1), 2)}。

トンネル長さがトンネル径に比較して大きい場合、局部挙動は別として全体挙動の検討を行う際には梁理論の適用が非常に有効であると思われる。水中トンネルは係留索をトンネル軸方向へ等間隔に配置した場合には弾性支承上梁とみることができ、さらに係留索剛性、係留索配置間隔、トンネル本体の剛性などによって弾性床上梁にモデル化できるならば、初期設計において基本的特性を評価する際に非常に有効であると考えられる。

静的な場合における弾性支承上梁を近似的に弾性床上梁とみなすことができる条件は Ellington³⁾により報告されている。しかし動的問題についても同様に考える場合は、分布荷重としての慣性力による影響も考慮して新たにその条件を調べる必要がある。

本研究では動的な場合において弾性支承上梁を弾性床上梁とみなすことができる条件についての検討を行うことを目的とする。そのために慣性力によるパラメータを含んだ弾性支承上梁の差分方程式^{4), 5)}と、それと等価な弾性床上梁の微分方程式より求められるそれぞれの特性根を比較することにより、両者の近似性を調べることにする。

2. 解析モデルと仮定

解析モデルを図-1に示す。浮力により緊張係留された水中トンネルを弾性支承上梁と考え解析を行う。この解析に関しては次の仮定に従うものとする。

- (1) 係留索の取り付け間隔 h は一定である。
- (2) 係留索は一定の軸剛性のみを有するバネである。
- (3) 断面はトンネル軸方向に対して一定である。
- (4) トンネルの曲げについては Bernoulli-Euler 梁理論に基づくものとする。

3. 弾性床上梁の特性根

最初に地盤反力係数 k'_w 、曲げ剛性 EI の弾性床上梁の曲げ自由振動を考える。分布荷重としての慣性力を考慮した支配方程式は次式となる。

$$\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + k'_w w(x, t) = 0 \quad (1)$$

ここで γ は単位体積重量、 A は梁の断面積、 g は重力加速度、 w は変位である。

自由振動を

$$w(x, t) = W(x)(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) \quad (2)$$

と表し、これを支配方程式に代入すると、次の関数 $W(x)$ に関する方程式が求められる。

$$EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + (k'_w - m\omega^2)W(x) = 0 \quad (m = \frac{\gamma A}{g}) \quad (3)$$

A Study on a Beam Model on Elastic Foundation Equivalent to Submerged Floating Tunnels in Dynamic Analysis

by Motohiro SATO, Takashi MIKAMI and Yasuhiko SASAKI

上式は弾性床土梁における静的なたわみの微分方程式の地盤係数 k'_w を $k'_w - m\omega^2$ に置き換えたものであることがわかる。ただしこの一般解を求める際に $k'_w - m\omega^2$ の正負で場合分けが生じる。

解の形として次式を仮定する。

$$W(x) = C \exp(\lambda_c x) \quad (4)$$

ここで C は x によらない任意定数である。

式(4)を式(3)に代入し整理すると、それぞれの場合について特性根と $W(x)$ は以下のように表される。

($k'_w - m\omega^2 > 0$ のとき)

$$\lambda_c = \pm(1+i)\alpha, \pm(1-i)\alpha \quad (5)$$

$$\text{ここで } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k'_w - m\omega^2}{4EI}} \quad (6)$$

$$W(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) \quad (7)$$

($k'_w - m\omega^2 < 0$ のとき)

$$\lambda_c = \pm\beta, \pm\beta i \quad (8)$$

$$\text{ここで } \beta = \sqrt[4]{\frac{-(k'_w - m\omega^2)}{EI}} \quad (9)$$

$$W(x) = C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x + C_7 \cosh \beta x + C_8 \sinh \beta x \quad (10)$$

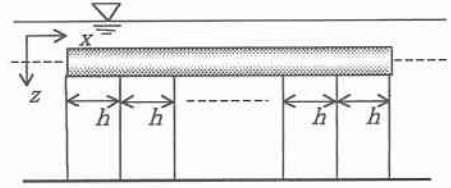


図-1 解析モデル

4. 弾性支承上梁の差分方程式

次に弾性支承上梁の慣性力を考慮した差分方程式とその特性方程式を3連モーメント式と力のつり合い式により導く。

4.1 動的な3連モーメント式について

部材の変形に伴う両端の節点回転角は次の3つの現象によって生じた回転角の重ね合わせとして与えられる。

- (a) 両節点のたわみによる部材回転角 R (剛体としての回転であり、幾何学的関係より得られる)
- (b) 材端に作用する曲げモーメントによる節点回転角 ψ', ψ''
- (c) 中間横荷重による節点回転角 θ_0

まず(a), (b)に関する回転角について考える。 M_{n-1} による $n-1$ 点でのたわみ角を ψ'_{n-1} , M_n による $n-1$ 点でのたわみ角を ψ''_{n-1} , $n-1 \sim n$ 点間の部材回転角を R_n , n 点でのたわみを w_n とすると、これらはそれぞれ次式で表される。

$$\psi'_{n-1} = \frac{M_{n-1}h}{3EI}, \quad \psi''_{n-1} = \frac{M_n h}{6EI} \quad (11)$$

$$R_n = \frac{1}{h}(w_n - w_{n-1}) \quad (12)$$

次に(c)に関する回転角について考える。本研究ではこの中間荷重として慣性力を考慮することとなる。まずたわみについて次式を仮定する。

$$w_n(x_n) = D \exp\left\{\lambda_D \left(n-1 + \frac{x_n}{h}\right)\right\} \quad (13)$$

ここで D は x_n によらない任意定数である。

このとき、慣性力として作用する分布荷重は次式となる。

$$p_n(x_n) = m\omega^2 w_n(x_n) = m\omega^2 \cdot D \exp\{\lambda_D(n-1 + \frac{x_n}{h})\} \quad (14)$$

ここで $n-1 \sim n$ 間における $n-1$ 点の中間荷重のみによるせん断力を $Q_{0,n-1}$ 、曲げモーメントを $M_{0,n}$ とすると次式が成り立つ。

$$M_{0,n} = Q_{0,n-1}x_n - \int_0^{x_n} p_n(x_n)(x_n - \xi)d\xi \quad (15)$$

式(15)の右边中について

$$Q_{0,n-1} = \frac{1}{h} \int_0^h p_n(x_n)(h - \xi)d\xi = Dm\omega^2 \left\{ -\frac{h}{\lambda_D} e^{\lambda_D(n-1)} + \frac{h}{\lambda_D^2} (e^{\lambda_D n} - e^{\lambda_D(n-1)}) \right\} \quad (16)$$

$$\int_0^{x_n} p_n(x_n - \xi)d\xi = Dm\omega^2 \left\{ -\frac{h}{\lambda_D} e^{\lambda_D(n-1)} x_n + \frac{h^2}{\lambda_D^2} (e^{\lambda_D(n-1 + \frac{x_n}{h})} - e^{\lambda_D(n-1)}) \right\} \quad (17)$$

となるのでこれらより

$$M_{0,n} = Dm\omega^2 \left\{ \frac{h}{\lambda_D^2} (e^{\lambda_D n} - e^{\lambda_D(n-1)}) x_n - \frac{h^2}{\lambda_D^2} (e^{\lambda_D(n-1 + \frac{x_n}{h})} - e^{\lambda_D(n-1)}) \right\} \quad (18)$$

ここで $n-1$ 点と n 点における慣性力による節点回転角を $\theta_{0,n-1}, \theta_{0,n}$ とするとモールの定理より

$$\theta_{0,n-1} = \frac{1}{EI} \frac{1}{h} \int_0^h M_{0,n}(h - x_n)dx_n (= \frac{1}{EI} \bar{A}_{0,n}), \quad \theta_{0,n} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{h} \int_0^h M_{0,n}x_n dx_n (= -\frac{1}{EI} \bar{B}_{0,n}) \quad (19)$$

式(19)に式(18)を代入して積分を行い整理するとこれらはそれぞれ次式で表される。

$$\theta_{0,n-1} = \frac{Dm\omega^2}{EI} \left\{ \frac{h^3}{6\lambda_D^2} (e^{\lambda_D n} + 2e^{\lambda_D(n-1)}) + \frac{h^3}{\lambda_D^3} e^{\lambda_D(n-1)} - \frac{h^3}{\lambda_D^4} (e^{\lambda_D n} - e^{\lambda_D(n-1)}) \right\} \quad (20)$$

$$\theta_{0,n} = -\frac{Dm\omega^2}{EI} \left\{ \frac{h^3}{6\lambda_D^2} (2e^{\lambda_D n} + e^{\lambda_D(n-1)}) - \frac{h^3}{\lambda_D^3} e^{\lambda_D n} + \frac{h^3}{\lambda_D^4} (e^{\lambda_D n} - e^{\lambda_D(n-1)}) \right\} \quad (21)$$

以上より $n-1$ 点でのたわみ角 ψ_{n-1} と n 点でのたわみ角 ψ_n はそれぞれ次式で表される。

$$\psi_{n-1} = \psi'_{n-1} + \psi''_{n-1} + R_n + \theta_{0,n-1} = \frac{h}{6EI} (2M_{n-1} + M_n) + \frac{1}{h} (w_n - w_{n-1}) + \frac{1}{EI} \bar{A}_{0,n} \quad (22)$$

$$\psi_n = \psi'_n + \psi''_n + R_n + \theta_{0,n} = -\frac{h}{6EI} (M_{n-1} + 2M_n) + \frac{1}{h} (w_n - w_{n-1}) - \frac{1}{EI} \bar{B}_{0,n} \quad (23)$$

上の2式に n 点におけるたわみ角の連続条件を考慮して整理すると、最終的に隣接する3格点間の弾性変形、曲げモーメントの関係について慣性力による項を含んだ次式が得られる。

$$\frac{h^2}{6EI} (M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1}) = -\frac{m\omega^2 h^4}{6EI} \frac{1}{\lambda_D^2} (w_{n-1} + 4w_n + w_{n+1}) - (1 + \frac{m\omega^2 h^4}{EI}) (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}) \quad (24)$$

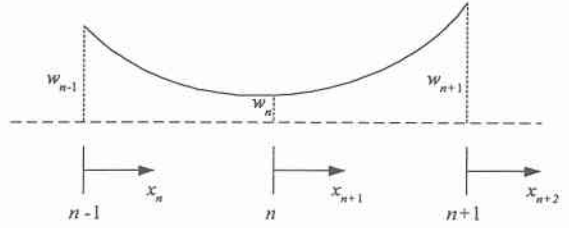


図-2 たわみの仮定に用いる x 座標

4. 2 力のつり合い式について

図-3に示す隣接する3格点の2格間分の力のつり合いについて考える。格点 n と $n+1$ の間のせん断力を $Q_{n,n+1}$ とする。慣性力を考慮してつり合いをとると次の3式が得られる。

$$Q_{n,n+1} - Q_{n,n-1} - N_n + \int_0^h m\omega^2 w_n(x_n) dx_n + \int_0^h m\omega^2 w_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1} = 0 \quad (25)$$

$$M_{n+1} - M_n - Q_{n,n+1}h - \int_0^h m\omega^2 w_{n+1}(x_{n+1})x_{n+1} dx_{n+1} = 0 \quad (26)$$

$$M_n - M_{n-1} - Q_{n,n-1}h + \int_0^h m\omega^2 w_n(x_n)(h-x_n) dx_n = 0$$

ここで N_n は $N_n = k_w w_n$ 、つまりばね(係留索)による復元力を表す。上式の Q を消去し積分を行い、整理すると次式が得られる。

$$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = k_w w_n h - m\omega^2 \frac{h^2}{\lambda_D^2} (w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}) \quad (27)$$

4. 3 差分方程式とその特性方程式

式(24)と式(27)において M を消去し、高階差分の定義を用いて整理することにより、次のたわみに関する弾性支承上梁の差分方程式が得られる。

$$(1 - \frac{6K_2}{\lambda_D^4})\Delta^4 w_n + K_1 \Delta^2 w_n + 6K_1 w_n = 0 \quad (28)$$

$$\text{ここで } K_1 = \frac{k_w h^3}{6EI}, \quad K_2 = \frac{m\omega^2 h^4}{6EI} \quad (29)$$

上式に $w_n = D \exp(\lambda_D n)$ を代入し整理する。高階差分の定義より

$$\Delta^2 w_n = (e^{\frac{\lambda_D}{2}} - e^{-\frac{\lambda_D}{2}})^2 w_n, \quad \Delta^4 w_n = (e^{\frac{\lambda_D}{2}} - e^{-\frac{\lambda_D}{2}})^4 w_n \quad (30)$$

であるから、これより特性方程式は次式となる。

$$(1 - \frac{6K_2}{\lambda_D^4})(e^{\frac{\lambda_D}{2}} - e^{-\frac{\lambda_D}{2}})^4 + K_1(e^{\frac{\lambda_D}{2}} - e^{-\frac{\lambda_D}{2}})^2 + 6K_1 = 0 \quad (31)$$

上式は超越方程式であるので、特性根は数値的に求めなければならない。

5. 等価な弾性床・上梁に対する判定条件

支承間隔 h の弾性支承上梁と等価な弾性床・上梁について、地盤係数に相当するものを

$$k'_w = \frac{k_w}{h}$$

とし、また座標について $x = nh$ であることを考慮に入れると、動的問題において弾性支承上梁を弾性床・上梁とみなすことができる条件について両者の特性根の比較からパラメータ K_1, K_2 を用いて表すと以下ようになる。

$$(K_1 > K_2 \text{ のとき}) \quad \lambda_D \cong \lambda_c h = \pm(1+i)\alpha h, \pm(1-i)\alpha h \quad \text{ここで } \alpha h = \sqrt[4]{\frac{3}{2}(K_1 - K_2)}$$

$$(K_1 < K_2 \text{ のとき}) \quad \lambda_D \cong \lambda_c h = \pm\beta h, \pm\beta h i \quad \text{ここで } \beta h = \sqrt[4]{6(K_2 - K_1)}$$

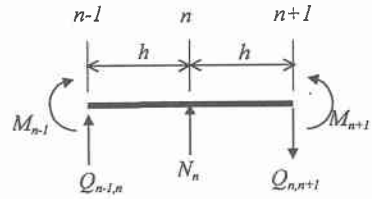


図-3 隣接する3格点の2格間分の力のつり合い

6. 計算結果

(I) $K_1 > K_2$ のとき

図-4は弾性床上梁と弾性支承上梁の特性根の実部の比, 図-5は虚部の比を示したものである。この範囲における特性根はすべて虚数となる。これらの図よりまず K_1 の変化による影響について, 静的な場合と同様に K_1 の増加に伴い両者の一致がみられなくなることがわかる。このことは実部, 虚部, あるいは K_2 の値の如何に関わらず同じ傾向であるといえる。 K_2 の変化に対しては同じ K_1 について, 実部は K_2 の増加に伴い一致する傾向, 虚部は一致しない傾向を示している。ただし両パラメータの変化に対する特性根の影響は虚部よりも実部の方が大きい。

図-6は実部, 虚部双方の影響をみるため, 特性根の偏角について示したものである。実線が破線に近いほど等価な弾性床上梁として近似できるといえる。まず静的な場合すなわち $K_2=0$ において, おおよそ $K_1 < 0.2$ までは実線と破線がほぼ一致している。つまり弾性支承上梁を等価な弾性床上梁とみなすことができる範囲であるといえる。このことは参考文献3)の結果と同様である。次に $K_2 \neq 0$ の場合についてみると, 偏角の値そのものは同じ K_1 に対しては K_2 が大きいほど弾性床上梁に近い値を取ることがよみとられる。ただし K_2 が大きい場合については両者を近似できる範囲は $|K_1 - K_2|$ がごく小さい場合に限られる。

(II) $K_1 < K_2$ のとき

図-7は $K_1 < K_2$ の範囲における等価な弾性床上梁に対する弾性支承上梁の特性根の実数解(虚部が0の解)の比を, 図-8は虚数解(実部が0)の比をそれぞれ示したものである。同じ K_1 についてみると実数解については K_2 が大きいほど, 虚数解については K_2 が小さいほど弾性床上梁の特性根に近い値となることがわかる。このことは(I)の実部と虚部の関係と一致している。

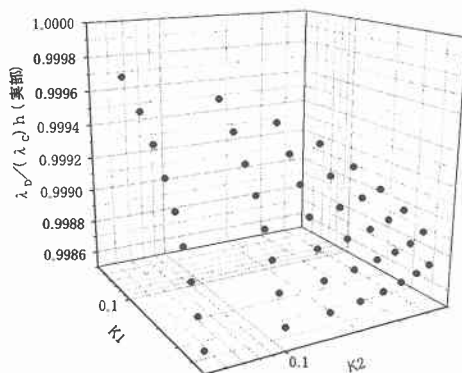


図-4 特性根の実部の比 ($K_1 > K_2$)

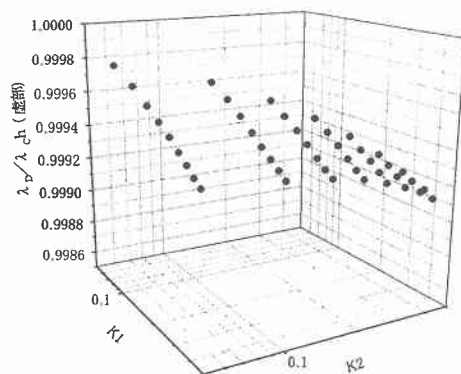


図-5 特性根の虚部の比 ($K_1 > K_2$)

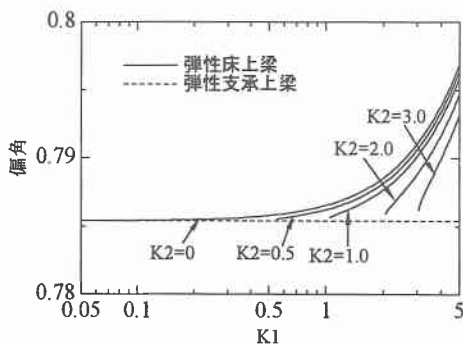


図-6 特性根の偏角の比 ($K_1 > K_2$)

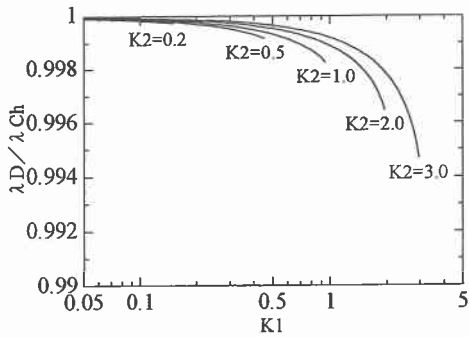


図-7 特性根の実数解の比 ($K_1 < K_2$)

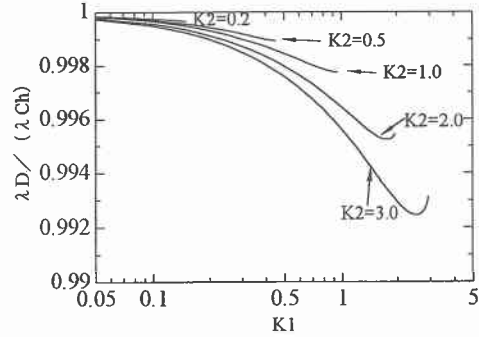


図-8 特性根の虚数解の比 ($K_1 < K_2$)

以上(I), (II)より K_1 による影響はいずれの特性根においても静的な場合と同様な傾向が得られた。しかし慣性力による K_2 については K_1 との関係などを含め今後検討が必要である。

7. まとめ

本研究では等間隔で緊張係留された水中浮遊式トンネルの動的解析において、近似的に弾性床上梁とみなして解析することのできる条件についての検討を行った。具体的にはまず慣性力の影響を考慮した弾性支承上梁の差分方程式とその特性方程式を導出した。得られた特性方程式は超越方程式となり、かつ虚数解をもつことが考えられるため、この解の実部と虚部を数値的に求めた。そしてこれより得られた解(特性根)について、それと等価な弾性床上梁の微分方程式より求められる特性根との比較を行うことにより両者の近似性を検討した。得られた結果をまとめると以下の通りである。

- (1) 係留索(弾性支承)によるパラメータ K_1 が及ぼす傾向は静的な場合と同様である。すなわち動的問題においても K_1 の増加に伴い弾性支承上梁と弾性床上梁のたわみ形状が異なることが特性根の比較より得られた。
- (2) 近似性については慣性力によるパラメータ K_2 が密接に関係し、少なからず影響を与える。 K_2 が大きい場合には両者を近似できる範囲は $K_1 - K_2$ がごく小さい場合に限られる。

弾性支承上梁と弾性床上梁について近似可能なパラメータの範囲を特定するためには、さらに実際の梁の動的解析と比較しながら行っていく必要もあると考えられ、これは今後の研究課題である。

[参考文献]

- 1) Krokeborg(ed.), : Proceeding of the Third Symposium on Strait Crossings, 1994.
- 2) (社)水中トンネル研究調査会: 水中トンネル 第I編 計画から設計・施工まで, 第II編 ケーススタディー, 平成7年.
- 3) Ellington, J.P. : The beam on discrete elastic supports, Bull.I.R.C.A., Vol.34, No.12, pp.933-941, 1957.
- 4) 石川廣美: 差分方程式入門, コロナ社, 1976.
- 5) 島田静雄: 土木応用数学, 共立出版, 1967.