

I-45

ハイラーキ要素による平板の曲げ振動解析

函館工業高等専門学校 ○正会員 渡辺 力

長岡技術科学大学 正会員 林 正

函館工業高等専門学校 早川 陽介

函館工業高等専門学校 佐々木有希

函館工業高等専門学校 澤田 修

1. まえがき

節点自由度と節線自由度を有する節点帯板法は、橋梁構造物の全体解析を効率良く計算するために開発された。この解法を用いて大規模構造の効率的な全体解析法を開発し、橋梁構造物の応力解析や座屈解析、自由振動解析を行っている。しかし、節点帯板要素では、高精度の解を得るために多数の節点を設けていたもので、複雑な構造物では節点の配置が面倒となる。そこで、側辺上の節点を取り除き、この辺上でも変位を級数展開したものがハイラーキ要素である。このハイラーキ要素を大規模固有値問題に適用するために2段階動的縮小法を開発し、橋梁構造物の自由振動解析に用いて精度と適用性を調べている¹⁾。

本研究は、文献1)を補足するものであり、ハイラーキ要素を平板の曲げ振動解析に用いて精度と収束性、および計算効率を調べる。なお、平板の自由振動解析での精度と収束性については文献1)でも調べているが、ここでは薄板解析において Kirchhoff 理論に忠実な値を計算するために、最適ペナルティ数²⁾を用いた Kirchhoff 要素を用いる。Kirchhoff 要素により種々の境界条件を有する平板に対する精度と収束性を、Mindlin 要素により要素分割法が計算効率に与える影響を調べた結果を報告する。

2. ハイラーキ要素¹⁾

平板の曲げ振動解析には、図-1 のように4つの節点と4本の節線を有する四辺形要素を用いる。要素の変位成分には w, θ_x, θ_y を用いて、これらの任意の成分を d とすると、 d の変位関数を次式の二重級数で仮定する。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{mn}(\xi, \eta) d_{mn} \quad (1)$$

ここに、 $N_{mn}(\xi, \eta)$ はハイラーキ多項式 $f_m(\xi)$ と $f_n(\eta)$ の積で与えられる形状関数である。また、 d_{mn} は節点、節線、節面自由度の一般化変位で、添字 m, n は多項式の次数を表す(ただし、0 は1次式である)。

曲げ解析に Mindlin 理論を用いると次式の曲げ振動に対する固有方程式が得られる。

$$[k_b] d_b = p^2 [m_b] d_b \quad (2)$$

ここに、 k_b は剛性行列、 p は固有円振動数であり、質量行列 m_b は次のようなブロック対角行列である。

$$m_b = \iint \rho \begin{bmatrix} tF & & \\ rF & & \\ & & rF \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3)$$

$$F = f f^T, \quad r = t^3/12, \quad d_b = \{ w^T \theta_x^T \theta_y^T \}^T \quad (4)$$

式(3)の $|J|$ は2次元の Jacobian で、 ρ は質量密度、 t は板厚である。また、式(4)の f は形状関数ベクトル、 w, θ_x, θ_y は、各変位成分に対応した一般化変位ベクトルである。なお、この要素を Mindlin 要素と呼ぶ。

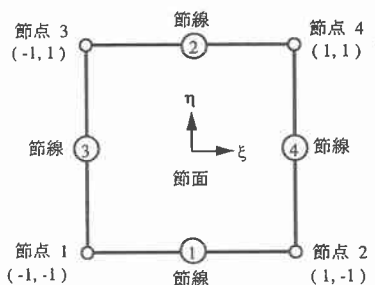


図-1 ハイラーキ四辺形要素

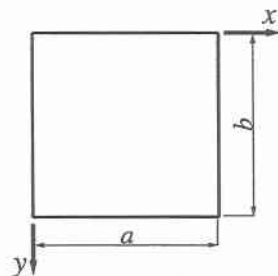


図-2 平 板

Flexural vibration analysis of plates by hierarchical finite elements

by Chikara WATANABE, Masa HAYASHI, Yousuke HAYAKAWA, Yuki SASAKI and Osamu SAWADA

表-1 4 辺単純支持板の無次元振動数 $\lambda^* = pb^2 \sqrt{\rho t/D}$ ($m=n=10, \nu=0.3$)

t/b	$a/b=1$					$a/b=2$		
	$\alpha=1$	$\alpha=10^2$	$\alpha=10^4$	$\alpha=10^6$	α^*	$\alpha=10^4$	$\alpha=10^6$	α^*
0.001	19.7391624	19.7392084	—	—	19.7392090	—	—	12.3370055
0.003	19.7387913	19.7392046	19.7392094	—	19.7392091	12.3370060	—	12.3370056
0.01	19.7345719	19.7391624	19.7392084	—	19.7392087	12.3370053	—	12.3370055
0.03	19.6975940	19.7387913	19.7392046	19.7392091	19.7392089	12.3370039	12.3370059	12.3370054
0.1	19.2910911	19.7345719	19.7391624	19.7392085	19.7392091	12.3369874	12.3370054	12.3370054
0.3	16.5474043	19.6975940	19.7387913	19.7392046	19.7392091	12.3368424	12.3370039	12.3370055
解析解	19.7392088					12.3370055		

表-2 SCSC 板の無次元振動数 $\lambda^* = pb^2 \sqrt{\rho t/D}$ ($m=n=10, \nu=0.3$)

t/b	$a/b=1$					$a/b=2$		
	$\alpha=1$	$\alpha=10^2$	$\alpha=10^4$	$\alpha=10^6$	α^*	$\alpha=10^4$	$\alpha=10^6$	α^*
0.001	28.9506479	28.9508484	—	—	28.9508499	—	—	23.8156253
0.003	28.9490283	28.9508321	28.9508496	—	28.9508500	23.8156261	—	23.8156252
0.01	28.9306420	28.9506479	28.9508484	—	28.9508498	23.8156246	—	23.8156253
0.03	28.7715578	28.9490283	28.9508321	28.9508496	28.9508499	23.8156127	23.8156257	23.8156253
0.1	27.1724365	28.9306420	28.9506479	28.9508484	28.9508499	23.8154769	23.8156246	23.8156253
0.3	19.8847944	28.7715578	28.9490283	28.9508322	28.9508499	23.8142832	23.8156127	23.8156253
解析解	28.9508504					23.8156261		

3. 数値計算例

(1) Kirchhoff 要素

a) 最適ペナルティ数 Mindlin 理論により定式化されたハイラーキ要素では、せん断変形が必然的に考慮されているために、板厚比によってはその影響が現れる。本研究では Kirchhoff 理論に忠実な値を求めるためにペナルティ要素を用いるが、ここでは、自由振動解析におけるペナルティ数の効果を調べてみる。

表-1, 2 は、4 辺単純支持正方形板 (SSSS) 及び相対する 2 辺が単純支持で他の 2 辺が固定支持された正方形板 (SCSC) の一次モードの無次元振動数 λ^* を、ペナルティ数 α を変えて求めたものである。ここで、 a/b は板の形状比、 t/b は板厚比 (幅厚比) である。数値計算では式 (3) の回転慣性項 rF を省略し、正確な値を得るためと桁落ちを調べるために $m=n=10$ 次式を用いて、要素分割を行わずに計算する。ポアソン比 $\nu=0.3$ として、無次元振動数 λ^* と線形剛性行列 K_b のせん断剛性 D_s を次式で与える。

$$\lambda^* = pb^2 \sqrt{\rho t/D}, \quad D_s = \alpha G t \quad (5)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性である。なお、 C^0 級要素の定式では、 α はせん断補正係数 k となる。

表-1 と表-2 より、 λ^* は α と $(t/b)^2$ に比例して Kirchhoff 理論による解に収束するが、 $\alpha > 10^4$ では桁落ちが生じるために消去演算が不能になることがある (表中の — の箇所)。数値計算では、条件数が 10^{12} 以上になる場合を演算不能と判定している。よって、次式の最適ペナルティ数 α^* を用いる²⁾。

$$\alpha^* = 10^j t^2 / |J|, \quad j=6 \sim 8 \quad (6)$$

表-1, 2 の値より、 α^* を用いれば板厚比に関係なく、 C^0 級要素を用いて薄板理論による値が得られる。式 (6) の指数 j には内部自由度の採り方や縮約法などに応じて 6~8 程度を用いればよいが、本計算例では $j=8$ を用いている。なお、文献 1) では $\alpha=10^4$ を用いていた。

b) 種々の境界条件を有する薄板 式 (6) の最適ペナルティ数による Kirchhoff 要素を用いて、図-2 に示す種々の境界条件を有する正方形板を計算する。計算モデルは、板厚比 t/b を 1/100、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、せん断弾性係数 G とし、境界条件は、SSSS, SCSC, SCSF, SSSF とする。ここに、S は単純支持、C は固定支持、F は自由支持を表し、これらの記号の並びは $x=0, y=0, x=a, y=b$ における辺の順に付けている。なお、要素分割は行わずに 1 要素で計算し、多項式の次数には $m=n=4 \sim 10$ 次式を用いる。また、無次元振動数には $\lambda^* = pt \sqrt{\rho/G}$ を用いる。

表-3 は、 x 軸と y 軸に関して、半波数数が 3 波形までのモードについて無次元振動数の Kirchhoff 理論³⁾ に対する誤差 (%) を示したものである。どの境界条件においても極めて良い精度と収束性が得られている。

表-3 種々の境界条件を有する平板の無次元振動数 $\lambda^* = pt\sqrt{\rho/G}$ の誤差 (Kirchhoff 要素) (%)

B.C.	$m=n$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(3, 1)	(2, 3)	(3, 2)	(3, 3)
SSSS	4	1.6E-02	5.3E+00	5.3E+00	6.8E+00	4.1E+01	4.1E+01	3.0E+01	3.0E+01	3.3E+01
	6	7.6E-06	4.8E-02	4.8E-02	6.3E-02	1.4E+00	1.4E+00	9.8E-01	9.8E-01	1.2E+00
	8	-4.5E-06	1.1E-04	1.1E-04	1.5E-04	2.0E-02	2.0E-02	1.3E-02	1.3E-02	1.5E-02
	10	-3.8E-07	5.9E-07	-5.1E-07	-7.0E-06	9.8E-05	9.0E-05	6.6E-05	5.4E-05	5.9E-05
	$\lambda^* \times 10000$	9.631748	24.07937	24.07937	38.52699	48.15874	48.15874	62.60636	62.60636	86.68573
SCSC	4	1.2E-02	2.0E+01	4.7E+00	1.4E+01	non	3.9E+01	non	2.9E+01	non
	6	1.8E-03	3.9E-01	4.9E-02	1.8E-01	4.6E+00	1.4E+00	2.7E+00	8.2E-01	1.7E+00
	8	-2.1E-06	2.4E-03	1.5E-04	7.7E-04	1.6E-01	2.0E-02	1.1E-01	9.5E-03	7.9E-02
	10	-2.1E-06	-9.9E-07	1.2E-06	-7.1E-06	1.3E-03	8.6E-05	5.4E-04	1.2E-05	8.5E-05
	$\lambda^* \times 10000$	14.12657	33.82812	26.71188	46.15289	62.99217	49.87639	75.52281	68.41279	97.49756
SCSF	4	4.0E-02	1.7E-01	6.2E+00	4.0E+00	2.4E+01	4.7E+01	2.4E+01	3.4E+01	3.7E+01
	6	5.0E-05	-1.4E-04	5.7E-02	3.0E-02	4.9E-01	1.6E+00	4.0E-01	1.1E+00	9.9E-01
	8	-2.8E-07	-5.3E-06	1.4E-04	1.2E-06	3.4E-03	2.4E-02	3.5E-03	1.6E-02	1.4E-02
	10	1.6E-06	-2.1E-06	3.0E-06	-1.1E-05	2.0E-06	1.1E-04	-3.7E-06	5.3E-05	7.2E-05
	$\lambda^* \times 10000$	6.190798	16.13411	20.34846	30.74809	35.32639	44.21382	50.33773	54.59985	74.54577
SSSF	4	2.2E-02	2.4E-01	6.2E+00	4.8E+00	1.2E+01	4.7E+01	1.2E+01	7.2E+01	2.9E+01
	6	1.2E-05	-2.6E-05	5.7E-02	4.2E-02	1.7E-01	1.7E+00	1.6E-01	1.2E+00	8.9E-01
	8	-2.5E-06	-4.0E-06	1.3E-04	9.4E-05	8.0E-04	2.4E-02	9.1E-04	1.7E-02	1.1E-02
	10	3.7E-06	-1.7E-06	3.1E-06	-1.3E-05	-1.5E-07	1.1E-04	-1.1E-05	7.1E-05	4.5E-05
	$\lambda^* \times 10000$	5.701470	13.54371	20.10191	28.82102	30.18489	44.05900	46.10333	53.14677	71.06413

表-4 4 辺単純支持板の無次元振動数 $\lambda^* = pt\sqrt{\rho/G}$ の誤差 (Mindlin 要素) (%)

t/b	$m=n$	(1, 1)	(2, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 1)	(1, 3)	(3, 2)	(2, 3)	(3, 3)
0.01	4	1.6E-02	1.9E+01	1.9E+01	1.7E+01	4.1E+01	4.1E+01	3.1E+01	3.1E+01	3.3E+01
	6	7.2E-06	2.8E-01	2.8E-01	2.6E-01	1.4E+00	1.4E+00	1.0E+00	1.0E+00	1.2E+00
	8	-5.0E-09	1.2E-03	1.2E-03	1.0E-03	2.0E-02	2.0E-02	1.3E-02	1.3E-02	1.5E-02
	10	-6.0E-09	1.5E-06	1.5E-06	1.3E-06	9.8E-05	9.8E-05	6.2E-05	6.2E-05	7.0E-05
	$\lambda^* \times 10000$	9.628206	24.05726	24.05726	38.47044	48.07044	48.07044	62.45728	62.45728	86.40040
0.05	4	1.6E-02	1.6E+01	1.6E+01	1.4E+01	3.8E+01	3.8E+01	2.8E+01	2.8E+01	2.9E+01
	6	7.1E-06	2.1E-01	2.1E-01	1.9E-01	1.4E+00	1.4E+00	9.2E-01	9.2E-01	1.0E+00
	8	8.9E-10	7.2E-04	7.2E-04	6.2E-04	1.9E-02	1.9E-02	1.2E-02	1.2E-02	1.3E-02
	10	3.9E-12	7.6E-07	7.6E-07	6.4E-07	9.2E-05	9.2E-05	5.6E-05	5.6E-05	6.1E-05
	$\lambda^* \times 100$	2.386155	5.886989	5.886989	9.299567	11.52852	11.52852	14.80678	14.80678	20.10855
0.1	4	1.5E-02	1.1E+01	1.1E+01	1.0E+01	3.1E+01	3.1E+01	2.2E+01	2.2E+01	2.3E+01
	6	6.7E-06	1.2E-01	1.2E-01	1.1E-01	1.2E+00	1.2E+00	7.5E-01	7.5E-01	8.2E-01
	8	8.4E-10	3.5E-04	3.5E-04	3.1E-04	1.6E-02	1.6E-02	9.9E-03	9.9E-03	1.1E-02
	10	-1.4E-12	3.2E-07	3.2E-07	2.8E-07	7.9E-05	7.9E-05	4.6E-05	4.6E-05	4.8E-05
	$\lambda^* \times 100$	9.299567	22.17628	22.17628	34.01826	41.43983	41.43983	51.97421	51.97421	68.20804

なお、SCSF の(1,1)と(2,2)モードでは、 $m=n=10$ 次式の解が 8 次式の解よりも精度が悪くなっているが、これはペナルティによる桁落ちの影響と考えられる。

(2) Mindlin 要素

a) 板厚比の影響 Mindlin 要素を用いて 4 辺単純支持正方形板を計算し、厚板解析での精度と収束性を調べる。解析モデルは、板厚比 $t/b=1/100, 5/100, 1/10$ 、せん断補正係数 $k=\pi^2/12$ とし、他の定数は(1)と同じとする。また、要素分割と多項式の次数も(1)と同じである。また、無次元振動数には $\lambda^* = pt\sqrt{\rho/G}$ を用いる。

表-4 には、 x 軸と y 軸に関して半波数が 3 波形までの曲げ振動モードについて、無次元振動数の Mindlin 理論による解析解⁴⁾に対する誤差 (%) を示してある。Mindlin 要素でも極めて良い精度と収束性が得られており、特に(1,1)モードの精度が他のモードに比べて極めて良い。また、 $t/b=5/100 \sim 1/10$ の中厚板では、 $t/b=1/100$ に比べて精度が向上している。

b) 要素分割と計算効率 次に、要素分割が解に与える影響を調べ、従来の FEM と計算効率を比較する。解析モデルは、板厚比 $t/b=1/100$ とし、他の定数は a) と同じとする。また、要素分割は、要素分割を行わない p 分割、 2×2 に分割した $hp2$ 分割、 4×4 に分割した $hp4$ 分割を用い、多項式の次数には $m=n=2 \sim 10$ 次式を用いる。また、比較のために、内部モードを考慮した 8 節点要素を用いた FEM 解⁵⁾も示してある。FEM では、 $N \times N$ に等分割している。

図-3は、曲げ振動の(1,1),(2,2),(3,3)モードについて縦軸に無次元振動数の解析解⁴⁾に対する誤差を、横軸に総自由度を示したものである。ハイラーキ要素では要素分割をしないp分割が最も収束率が良く、少ない自由度で極めて良い精度の解が得られるのに対して、分割を増やすにつれて収束率が悪くなっている。このことから、ハイラーキ要素では要素分割を少なくし、高次関数を用いた方が計算効率が良いと言える。しかし、高次モードとなるに従って(図-3(b),(c))、要素分割をしないp分割では10次式を用いても総自由度が不足しているために $10^{-4} \sim 10^{-6}$ %程度の誤差となっているが、hp2とhp4分割では $10^{-8} \sim 10^{-10}$ %程度まで精度が向上している。それに対して、FEM(h法)では収束率が極めて悪く、高次モードほど顕著となっている。

4. まとめ

平板の曲げ振動解析にハイラーキ要素を用いた数値計算結果をまとめると、次のようなことが言える。

- (1) 薄板解析において、最適ベナルティ数を用いた Kirchhoff 要素により任意の板厚比の平板に対して Kirchhoff 理論に忠実な値を計算できる。
- (2) ハイラーキ要素では、要素分割を減らし、高次関数を用いて計算した方が計算効率が良い。

参考文献

- 1) 林 正・渡辺 力：2段階動的縮小法を用いたハイラーキ要素による自由振動解析，土木学会論文集，No.619/I-46，pp.35-46，1999。
- 2) 林 正・渡辺 力・増井由春・上田隆博：ハイラーキ要素による平板の座屈解析，土木学会論文集（掲載予定）。
- 3) Leissa, A.W. : The free vibration of rectangular plates, *J. sound vib.*, Vol.31, pp.257-293, 1973.
- 4) Mindlin, R.D., Schacknow, A. and Deresiewicz, H. : Flexural vibrations of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, 1956.
- 5) NISAIII ユーザーズ・マニュアル Version 93.0 : Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.

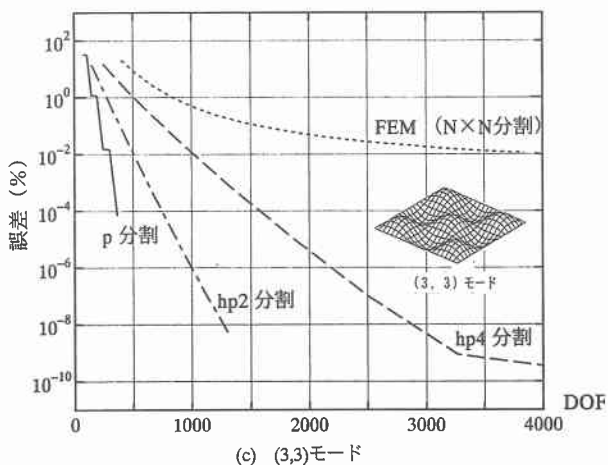
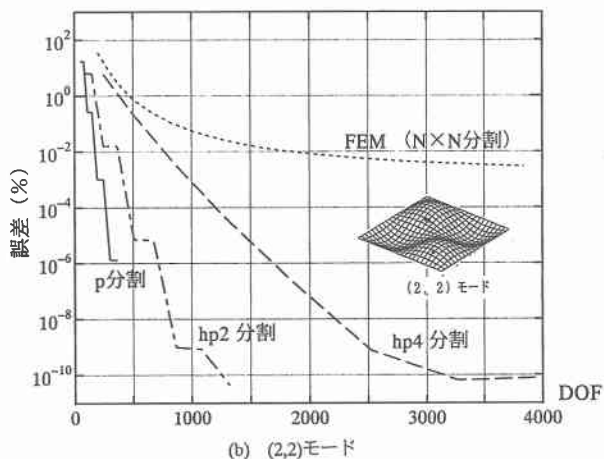
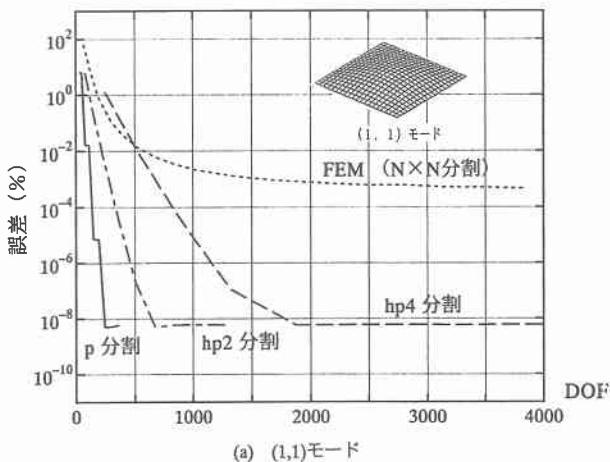


図-3 要素分割の影響 ($t/b=0.01$)