

I-44

厚板理論による横等方性円形厚板の非軸対称曲げ解析

北見工業大学大学院

学生員 中本 芳宏

北見工業大学

フェロー 奥村 勇

1. まえがき

厚板の曲げの問題は、古くから攻勢を極めた構造力学の重要なテーマである。2次元及び3次元弾性問題に関する最近の研究では、異方性材料に目が向けられている。異方性材料の中でも横等方性材料が実的な必要性からおもに取り扱われている。厚板の曲げ解析には3次元弾性論による厳密解析と厚板理論による近似解析とがあるが、本研究においては、厚板理論による解析を行う。厚板理論による解析の場合には、近似的になるという短所があるが、3次元弾性論に比べて、理論解析及び数値計算がはるかに容易になるという大きな長所がある。

本研究は、Love の理論に改良を加えた厚板理論を横等方性体に発展させ、上面に部分扇形分布荷重を受ける周辺単純支持の円形厚板の非軸対称曲げを解析し、その応力特性を明らかにするものである。解析方法は、荷重条件を満たすための特殊解と、境界条件を満たすための同次解からなっている。特殊解には、一般化された Elliott の解の一部を用い、同次解には、横等方性体の平面応力解、一般化平面応力解及び逆対称応力解を用いる。

2. 解析方法

特殊解と同次解とを重ね合わせて、円形厚板の荷重条件と境界条件とを満足するように解析する。

【特殊解】

板の上、下面における荷重条件を満たすための特殊解として、一般化された Elliott の解を用いる。変位成分を u_r, u_θ, u_z とすると一般化された Elliott の解は、次のように表される。

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1b)$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (\phi_{01} - \gamma_3 \phi_1) + k_2 (\phi_{03} - \gamma_2 \phi_3) + \gamma_1 \left(k_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + k_2 z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \quad (1c)$$

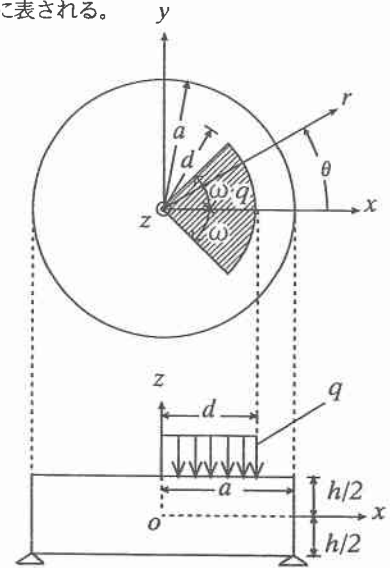


図-1 円形厚板の座標系

Axially asymmetric bending analysis of a transversely isotropic, thick circular plate by a thick plate theory

by Yoshihiro Nakamoto and I. Okumura.

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \phi_{01} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} &= 0, \quad \nabla_1^2 \phi_{03} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_{03}}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_1 + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_3 + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0; \\ \nabla_1^2 \psi + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2a-c)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

また、

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 [\nu_1 = \nu_2] \\ 0 [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} \frac{2c_{11}\nu_2}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 0 [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases} \quad (3a-c)$$

$$k_1 = \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad k_2 = \frac{c_{11}\nu_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad \nu_3 = \frac{c_{44}}{c_{66}} = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \quad (4a-c)$$

また、 ν_1 および ν_2 は、次式の 2 つの根を表す。

$$c_{11}c_{44}\nu^2 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}]\nu + c_{33}c_{44} = 0 \quad (5)$$

c_{ij} は、横等方性体の弾性定数を表す。いま、円形厚板の座標系を図-1 の様に定める。式 (1 a) から式 (1 c) に含まれる関数は、変位ポテンシャルとよばれるものである。円形厚板の非軸対称曲げの特殊解として必要になる変位ポテンシャルは、 ϕ_{03} 、 ϕ_3 及び ψ のみであり、他は 0 とすることができる。式 (2 b)、(2 d) および式 (2 e) をそれぞれ変数分離の方法で解くと、それらは、次のように求められる。

$$\phi_{03} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(A_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} + L_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} \right) \quad (6a)$$

$$\phi_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(C_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + M_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \quad (6b)$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \left(B_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + G_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} \right) \quad (6c)$$

ここで、

$$\alpha_{ms} = \frac{\lambda_{ms}}{a} \quad (m=0,1,2,\dots, s=1,2,3,\dots) \quad (7)$$

$$J_m(\lambda_{ms}) = 0 \quad (m=0,1,2,\dots, s=1,2,3,\dots) \quad (8)$$

また、 $J_m(\alpha_{ms}r)$ は第 1 種のベッセル関数、 λ_{ms} は式 (8) の第 m, s 番目の根を表し、 $A_{ms}^{(1)}, \dots, G_{ms}^{(1)}$ は、厚板の上、下面における境界条件から定められる未定数である。ここで、式 (1 a-c) に式 (6 a-c) を代入すると、変位成分の式が得られ、例えば、 $u_r^{(p)}$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned}
u_r^{(p)} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ms} \cos m\theta \left\{ \left[\frac{m}{\alpha_{ms} r} J_m(\alpha_{ms} r) - J_{m+1}(\alpha_{ms} r) \right] \left[A_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_2}} + L_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_2}} \right. \right. \\
& + \gamma_1 z \frac{\alpha_{ms}}{\sqrt{v_1}} \left(C_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_1}} + M_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_1}} \right) - \gamma_3 \left(C_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_1}} + M_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_1}} \right) \Bigg] \\
& \left. + \frac{m}{\alpha_{ms} r} J_m(\alpha_{ms} r) \left(B_{ms}^{(1)} \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_3}} + G_{ms}^{(1)} \sinh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{v_3}} \right) \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

上式のような変位成分から、応力成分、合応力、合偶力の式を求める。

【同次解】

板の周辺における境界条件を満たすための同次解として、平面応力解、一般化平面応力解、逆対称応力解の三つの解を用いる。それらの具体的な数式については、紙面の都合上、省略する。

3. 荷重条件及び境界条件

【荷重条件】

円形厚板の上面に部分扇形分布荷重が作用し、下面が自由の場合を考えると、荷重条件は次式のようになる。

$$z = h/2 \quad \text{において、} \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p(r, \theta) \quad (10a - c)$$

$$z = -h/2 \quad \text{において、} \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (11a - c)$$

ここで、 $p(r, \theta)$ は荷重関数であり、荷重強度を q とすると、次のように表される。

$$p(r, \theta) = \begin{cases} q & [0 < r < d \text{ 且 } 0 \leq \theta < \omega, 2\pi - \omega < \theta \leq 2\pi] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (12)$$

また、 $p(r, \theta)$ は次式のように Fourier-Bessel 展開されたとする。

$$p(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \quad (13)$$

ここで、

$$e_{ms} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^d p(r, \theta) \cos m\theta r J_m(\alpha_{ms} r) d\theta dr}{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta \cdot \int_0^d r J_m^2(\alpha_{ms} r) dr} \quad (14)$$

【境界条件】

円形厚板の周辺を単純支持とすると、境界条件は次式のようになる。

$r = a$ において、

$$T_{rr} = 0, \quad (u_{\theta})_{z=0} = 0, \quad (u_z)_{z=0} = 0, \quad M_r = 0, \quad \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (15a - e)$$

式 (1 a - c) から得られる特殊解の応力成分に円形厚板の荷重条件 (10 a - c) および (11 a - c) を課して、未定定数を定め、合応力 T_{rr} 、変位 u_{θ}, u_z 、合偶力 M_r に境界条件 (15 a - e) を課して、

同次解の未定定数を定め、コンピューターにかけて計算を行う。

4. 計算結果

図-1に示す荷重を受ける横等方性円形厚板の非軸対称曲げの解析結果を以下に示す。载荷幅比 $d/a = 0.3$ 、载荷角度 $\omega = 0.3\pi$ 、形状比 h/a は、 $1/2, 1/4, 1/6, 1/8$ の4種類、弾性定数 c_{ij} を炭素樹脂、E ガラス樹脂、等方性（ポアソン比 0.3）の3種類の値を用いて、計算を行った。図-2から図-4は、 $\theta = 0$ 、 $r = 0.2a$ における、垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ 、 σ_{zz} 及びせん断応力 σ_{rz} の z 方向における分布を示す。

図-2に示す $\sigma_{\theta\theta}$ は、3種類の値にあまり差がみられないが、応力分布が曲線分布になっていることがわかる。これは形状比 h/a が、比較的大きい $1/4$ であるため、直線分布にはならなかったと考えられる。

また、図-3に示す σ_{zz} は、3種類の値がほとんど一致しており、わずかな差しかみられない。応力分布は $z/h = 0.2 \sim -0.2$ 付近で、直線分布となっているが、それ以外のところでは曲線分布となっていることがわかる。

図-4に示す σ_{rz} は、等方性の値が他の二つの値に比べて、 $z = 0$ で大きくなり、炭素樹脂とEガラス樹脂の値は、ほぼ同じ値となっている。

5. あとがき

厚板理論により横等方性円形厚板の非軸対称曲げを解析したが、厚板理論による解析は近似的になるという短所があるため、どの程度の精確性があるかを明確にしなければならない。今後、3次元弾性論による解析との比較検討をし、他の異方性材料についても調べてみたいと思う。

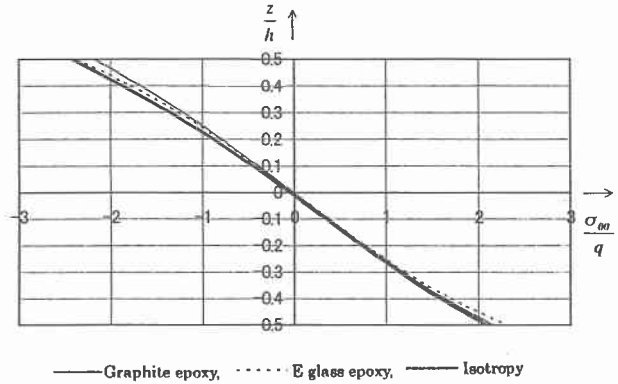


図-2 $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚方向の分布

($h/a = 1/4, d/a = 0.3, \omega = 0.3\pi, \theta = 0, r = 0.2a$)

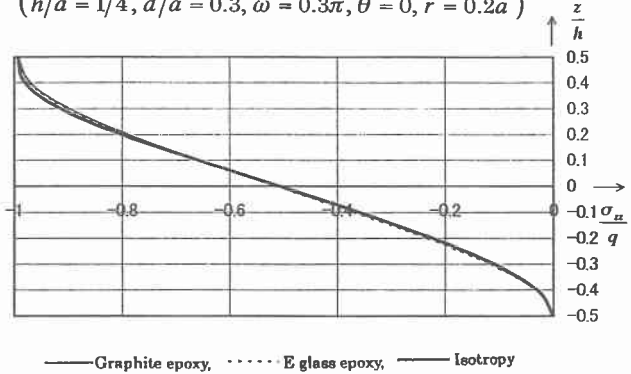


図-3 σ_{zz} の板厚方向の分布

($h/a = 1/4, d/a = 0.3, \omega = 0.3\pi, \theta = 0, r = 0.2a$)

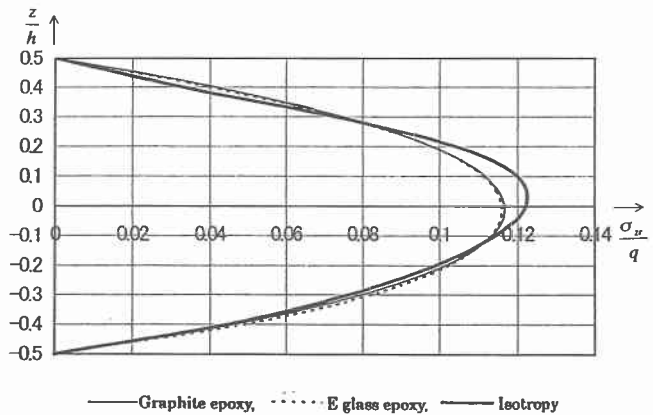


図-4 σ_{rz} の板厚方向の分布

($h/a = 1/4, d/a = 0.3, \omega = 0.3\pi, \theta = 0, r = 0.2a$)