

I-19

合成2主桁橋の固有振動解析とモード連成について

北海道大学大学院工学研究科	F 会員	林川 俊郎
北海道大学大学院工学研究科	○学生員	北島 勉
北海道大学大学院工学研究科	正 員	松井 義孝
北海道大学大学院工学研究科	F 会員	佐藤 浩一

1. まえがき

近年、わが国においても、PC床版を有する2主桁橋で代表されるような少数主桁橋の建設事例が増えてきており、その動的応答特性を調べることが重要となってきた。構造物の動的応答に影響を与えるものとしては、構造物に作用する外力の性質と構造物に固有の振動特性がある。すなわち、動的応答特性を把握するためには固有振動数、固有振動モードを精度よく計算し、構造物の基本的な固有振動性状を調べることが重要である。

一般に、2主桁橋等の合成桁構造を有する構造物の解析に際しては、これを鋼断面に換算し、薄肉開断面材として解析を行う方法が多く用いられる。薄肉断面を有する桁の固有振動解析については多くの研究が行われており、その解析方法として数値計算の一つである有限要素法が多くの研究で用いられている。著者らは、薄肉変断面桁の固有振動解析を行うにあたって、一般化された剛性マトリックスおよび一般化された質量マトリックスをすでに導いている¹⁾。同時に、振動の連成状態を知るためにモード連成比を導き、これにより非対称断面はりの固有振動における、曲げとねじりの連成状態について検討している。さらに、平面および立体骨組構造物の固有値と固有振動モードを主に橋梁構造物について計算し、集中質量法、整合質量法、連続質量法の3通りの手法による解を比較することによりその精度について検討している^{2),3)}。その結果、集中質量法による固有円振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による固有円振動数は上界値を与えており、同じ要素分割数では整合質量法を用いた方が精度の良い解が得られることが示されている。また、要素分割数を増やすにつれて、離散座標系による近似解は徐々に厳密解に近づく傾向にある。同時に筆者らは、連続質量法における固有剛性マトリックスの各要素を固有円振動数 ω に関して Taylor 展開することにより、集中質量法、整合質量法および連続質量法の3種類の質量マトリックス法の位置関係について数学的に考察している⁴⁾。

構造物について固有振動解析を行う場合、構造物の振動において慣性力に関する質量マトリックスは断面の重心において作成され、復元力に関する剛性マトリックスは断面の図心において作成される。したがって、断面の図心と重心とが等しい鋼断面では同一の節点に関してマトリックスが作成されるが、断面の図心と重心の異なる合成断面では断面内の解析節点に図心と重心とのずれが生じ、得られる固有値に誤差が生じるものと考えられる。そこで本研究の目的として、図心と重心およびせん断中心の異なる合成断面を有する2主桁橋について断面の図心と重心とのずれが、固有値にどの程度影響するかを調べるとともに、そのモード連成について検討するものである。

2. 解析方法

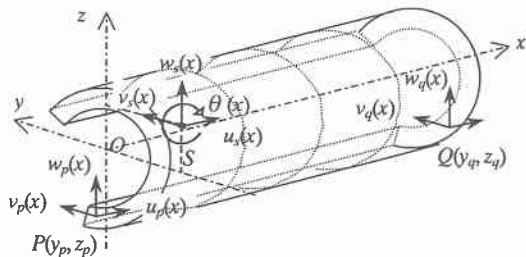
一般に構造物の固有振動性状を把握するためには、これを分割し有限要素解析を行うことによって固有振動数、固有振動モード等を求める手法が取られる。構造部材を図-1のような桁要素の集合体に分割して有限要素解析を行う場合、一般に要素間の各節点に断面の図心もしくはせん断中心をとる。鋼断面では断面の図心と重心とが一致しているため、図心を解析節点とすれば同一節点において剛性マトリックスと質量マトリックスが作成されるが、図-2のような合成断面においては、図心、重心が異なっているため断面内の解析節点に図心と重心とのずれが生じ、得られる固有値に誤差が生じるものと考えられる。そこで、この問題を解決する一つの方法として、図-1に示す薄肉断面部材要素の両端断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ 、 $Q(y_q, z_q)$ を新しい節点とする剛性マトリックスと質量マトリックスを作成することによって、断面内の同一節点においての解析が可能となる。

2-1. 座標変換マトリックス

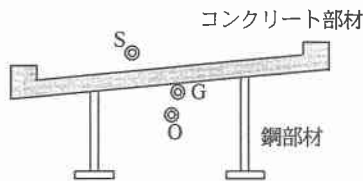
図-1に示すような断面において、せん断中心 S における変位は断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ における変位を用いて、次のように表すことができる。

Natural Vibration Analysis and Modal Coupling of Composite Two-Main Girder Bridges

By Toshiro HAYASHIKAWA, Tsutomu KITAJIMA, Yoshitaka MATSUI and Koichi SATO



図—1 桁要素の集合体に分割した部材要素



図—2 合成断面

$$u_s(x) = u_p(x) + y_p v'_p(x) + z_p w'_p(x) - \omega_n(y_p, z_p) \theta'(x) \quad (1a)$$

$$v_s(x) = v_p(x) + (z_p - z_s) \theta(x) \quad (1b)$$

$$w_s(x) = w_p(x) - (y_p - y_s) \theta(x) \quad (1c)$$

同様に、部材要素右端上の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とすると、点 Q に対しても式(1)と同様の関係式を導くことが可能である。したがって、部材要素両端面上のせん断中心における変位 $\{d_{SL}, d_{SR}\}^T$ は、断面上の任意点 P および Q における変位 $\{d_p, d_q\}^T$ で以下のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{Bmatrix} d_{SL} \\ d_{SR} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_p & 0 \\ 0 & T_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_p \\ d_q \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、

$$\begin{aligned} d_{SL} &= \{u_{SL}, v_{SL}, w_{SL}, \theta_{xSL}, \theta_{ySL}, \theta_{zSL}, \theta_{\omega SL}\}^T, \quad d_{SR} = \{u_{SR}, v_{SR}, w_{SR}, \theta_{xSR}, \theta_{ySR}, \theta_{zSR}, \theta_{\omega SR}\}^T \\ d_p &= \{u_p, v_p, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, \theta_{\omega p}\}^T, \quad d_q = \{u_q, v_q, w_q, \theta_{xq}, \theta_{yq}, \theta_{zq}, \theta_{\omega q}\}^T \end{aligned} \quad (3a-d)$$

また、

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_p & y_p & -\omega_n(y_p, z_p) \\ 1 & 0 & z_p - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(y_p - y_s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -(y_p - y_s) & 0 \\ 0 & & & 1 & z_p - z_s & 1 \end{bmatrix}, \quad T_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_q & y_q & -\omega_n(y_q, z_q) \\ 1 & 0 & z_q - z_s & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(y_q - y_s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -(y_q - y_s) & 0 \\ 0 & & & 1 & z_q - z_s & 1 \end{bmatrix} \quad (4a-b)$$

2-2. 一般化された剛性および質量マトリックス

式(2)を便宜上、簡単に $d_s = T d_{pq}$ と表せば、座標変換マトリックス T を用いて図心位置における要素剛性マトリックス K を、部材要素両端面上の任意点における要素剛性マトリックス K_{pq} へ次式により変換することができる。

$$K_{pq} = T^T K T \quad (5)$$

また、部材要素に関する要素質量マトリックス M についても同様の方法により、断面上の任意点における要素質量マトリックス M_{pq} を導くことができる。

$$M_{pq} = T^T M T \quad (6)$$

したがって、部材要素の両端面上の任意点における剛性マトリックスと質量マトリックスがそれぞれ式(5)、式(6)により求めることができる。同一の節点における剛性マトリックスおよび質量マトリックスを導くことにより解析が可能となり、最終的に振動数方程式は式(7)で表示される固有値問題となる。

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (7)$$

ここに、 K と M はそれぞれ断面内の任意点における剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 ω は構造物の固有円振動数である。本研究では固有値を求める手法として、固有値が近接する場合にも比較的容易に解を求めることができる Householder 法を用いる。

3. 数値計算結果

3-1. 解析節点の相違と固有振動数の相対誤差

図-2に示すような合成断面を有する両端単純支持桁について数値計算を行った。鋼材の板厚は 12mm、コンクリート床版の厚さは 0.32m、支間長は 31.5m である。断面諸元および図心 O、せん断中心 S、重心 G の座標値 (y, z) を表-1に示す。また有限要素法における要素分割数は 12 分割としている。固有振動解析を行う節点としては図心 O、せん断中心 S および重心 G の 3 点とするが、式(7)で示される振動数方程式において質量マトリックスは断面重心に関するものであり、剛性マトリックスは図心に関するものであるから、先に導いた任意点への変換マトリックスを用いて、図心位置における質量マトリックスやせん断中心位置における剛性マトリックス等を求め解析を行う。

数値計算結果として、図心と重心とのずれを考慮した場合と考慮しない場合について、図心 O、せん断中心 S および重心 G の 3 点を解析節点として求められた固有振動数および振動モードを表-2に示す。表-2にはそれぞれの点を解析点に選んだ場合について、10 次モードまでの固有振動数(Hz)と振動モードが示されており、また括弧内の値は基本的な解析方法である、図心と重心とのずれを考慮しない場合の、図心を節点とした場合の固有振動数に対する、他の点を節点とした場合の固有振動数の相対誤差(%)である。表-2に示されているように、図心と重心とのずれを考慮した場合と考慮しない場合の固有振動数は高次モードにおいてやや相違があるもののいずれも 1 % 未満であり、このことから断面内における図心と重心のずれはさほど考慮に入れる必要がないものと考えられる。

一方、解析節点が異なる場合の固有振動数においては、重心 G を節点とした場合については水平振動モード (H1,H2)ではほとんど相対誤差が無く、ねじり振動モード(T1,T2,T3,T4)ではほぼ同程度の相対誤差であることが認められる。これに対し、鉛直振動モード(V1,V2,V3,V4)では相対誤差にさほど傾向が見られず、鉛直 1 次モードでは比較的大きな相対誤差が見られた。せん断中心 S を節点に取った場合には重心を節点にとった場合と同様の傾向が認められ、重心の場合と比較して全体的に大きな相対誤差を示した。このことから、図心からの偏心距離が大きくなるほど固有振動数の相対誤差が大きくなるものと思われ、偏心の大きな断面形状ではこのことを考慮に入れる必要があるものと考えられる。

3-2. モード連成比

図-2に示す 2 主桁橋のような、二軸非対称断面を有する直線桁の図心とせん断中心との偏心量を考慮に入れた固有振動解析を行うと、曲げ振動とねじり振動とが連成した複雑な固有振動モードが現れ、三

表-1 断面諸元および座標値

$A(m^2)$	4.488×10^{-1}
$I_y(m^4)$	1.062×10^{-1}
$I_z(m^4)$	2.644×10^0
$J(m^4)$	2.737×10^{-4}
$C_w(m^6)$	5.069×10^{-1}
$m(t/m)$	3.523×10^0
図心 O	(0.000,0.000)
せん断中心 S	(0.321,0.312)
重心 G	(-0.008,0.205)

表-2 各点を節点とした場合の固有振動数 (Hz)

振動モード	解析節点の位置					
	図心 O		重心 G		せん断中心 S	
	節点のずれの影響		節点のずれの影響		節点のずれの影響	
	考慮しない	考慮する	考慮しない	考慮する	考慮しない	考慮する
T1	3.462	3.462 (0.000)	3.487 (0.741)	3.487 (0.741)	3.518 (1.622)	3.518 (1.622)
V1	3.945	3.944 (-0.021)	4.212 (6.761)	4.212 (6.774)	4.504 (14.163)	4.505 (14.192)
T2	13.741	13.741 (-0.001)	13.829 (-0.641)	13.829 (0.639)	13.964 (1.622)	13.964 (1.622)
V2	15.781	15.768 (-0.081)	15.754 (-0.172)	15.741 (-0.256)	15.718 (-0.400)	15.705 (-0.484)
H1	19.684	19.684 (0.000)	19.684 (0.000)	19.684 (0.000)	19.807 (0.622)	19.806 (0.620)
T3	30.879	30.878 (-0.003)	31.083 (0.659)	31.082 (0.657)	31.380 (1.622)	31.380 (1.622)
V3	35.514	35.453 (-0.173)	35.748 (0.658)	35.696 (0.512)	36.043 (1.487)	35.996 (1.355)
T4	54.898	54.896 (-0.005)	55.239 (0.621)	55.235 (0.614)	55.789 (1.622)	55.789 (1.622)
V4	63.171	62.988 (-0.290)	62.249 (-1.460)	62.024 (-1.816)	61.025 (-3.398)	60.802 (-3.751)
H2	78.741	78.740 (0.000)	78.738 (-0.003)	78.737 (-0.005)	76.733 (-2.550)	76.809 (-2.454)

重連成振動問題では支配的な固有振動モードを判定することが困難な場合がある。そこで、モード連成状態を判定する指標として、新たにモード連成比という算定式を提示する。モード連成比とは、1 節点 7 自由度を有する各固有振動モードの中で、それぞれの変位振幅が全体の変位振幅の総和に対して占める割合を数値的に表すパラメータであり、次式によって定義される。たとえば、第 i 次固有振動モードの x 軸方向変位のモード連成比は次のように表される。

$$\phi_{xi} = \frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{u_{ij}^2}}{\Phi} \quad (8a)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^N (\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\theta_{xij}^2} + \sqrt{\theta_{yij}^2} + \sqrt{\theta_{zij}^2} + \sqrt{\theta_{w_{ij}}^2}) \quad (8b)$$

ここに N は全節点数である。また、 u_{ij} 、 v_{ij} 、 w_{ij} 、 θ_{xij} 、 θ_{yij} 、 θ_{zij} 、 $\theta_{w_{ij}}$ は第 i 次固有振動モードの節点 j における x 、 y 、 z 軸方向の変位振幅、 x 、 y 、 z 軸回りの回転角の振幅およびねじり率の振幅である。

重心、図心およびせん断中心を解析節点とした場合のモード連成比の計算結果をそれぞれ表-3、4、5に示す。ここで、重心と図心とのずれは考慮されている。表-3より、重心を解析節点とした場合にはすべての振動モードにおいて複雑な固有振動モードであることがわかる。一方、図心を解析節点とした場合には、主軸回りの曲げ振動、つまり y 軸回りの鉛直曲げ振動(ϕ_z と ϕ_{θ_y})および z 軸回りの水平曲げ振動(ϕ_y と ϕ_{θ_z})が独立したモード形状で現れていることがわかる。しかし、高次モードにおいては若干他のモードが連成しており、重心と図心のずれの影響により曲げ振動を完全には分離できないことがわかる。また、ねじり振動は偏心距離の影響を受けて複雑な固有振動モードであることが理解できる。解析節点をせん断中心とした場合にも同様に、高次モードにおいては、ねじり振動(ϕ_{θ_x} と ϕ_{θ_w})を完全に分離できていないことがわかる。また図心の場合と逆に、曲げ振動は他の変位成分との連成振動モードが生じていることが理解できる。このことは、ねじり振動はせん断中心軸を、曲げ振動は図心軸を選択することにより、その連成効果を分離することができるものと考えられる。ただし、2主桁橋のような重心と図心のずれがある構造では完全には分離できないものと考えられる。

4. あとがき

本研究では、図心と重心およびせん断中心の異なる合成断面を有する2主桁橋について断面の図心と重心とのずれが、固有値にどの程度影響するかを調べるとともに、そのモード連成について検討した。図心と重心とのずれを考慮した場合と考慮しない場合の固有振動数を比較した結果、高次モードにおいてやや相違があるもののいずれも1%未満である。このことから断面内における図心と重心のずれの影響は比較的小さいものと考えられる。また、解析節点異なる場合の固有振動数を比較した結果、図心からの偏心距離が大きくなるほど固有振動数の相対誤差が大きくなるものと思われ、偏心の大きな断面形状ではこのことを考慮に入れる必要があるものと考えられる。解析節点異なる場合のモード連成比を求めた結果、ねじり振動はせん断中心軸を、曲げ振動は図心軸を解析節点として選択することにより、その連成効果を分離することができるものと考えられる。ただし、2主桁橋のような重心と図心のずれがある構造では完全には分離できないものと考えられる。

<参考文献>

- 1) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一：薄肉変断面桁の三重連成振動解析について、鋼構造年次論文報告集、第5巻、pp.309-312、1997年11月。
- 2) 林川俊郎・佐藤康治・角田典史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度、北海道大学工学研究報告、第148号、pp.1-15、1989年10月。
- 3) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Steel Bridges of Arch-Structural Systems, Proc. of EASEC-3, pp.963-968, April, 1991.
- 4) 林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一：薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究、応用力学論文集、Vol.1, pp.303-310、1998年10月。

表-3 重心におけるモード連成比 (%)

	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
T1	0.1	6.3	26.9	58.6	1.2	0.7	6.3	100.0
V1	0.4	0.2	88.4	1.8	8.9	0.0	0.2	100.0
T2	1.4	6.1	18.4	56.8	3.8	1.3	12.2	100.0
V2	5.8	0.0	78.5	0.1	15.6	0.0	0.0	100.0
H1	0.0	90.2	0.0	0.0	0.0	9.7	0.0	100.0
T3	1.3	5.6	17.9	51.9	4.9	1.8	16.8	100.0
V3	5.6	0.0	72.4	0.2	21.7	0.0	0.1	100.0
T4	4.0	5.1	13.9	47.4	6.9	2.2	20.4	100.0
V4	16.9	0.1	58.8	0.6	23.4	0.0	0.2	100.0
H2	2.9	78.8	0.9	0.0	0.4	17.0	0.0	100.0

表-4 図心におけるモード連成比 (%)

	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
T1	0.0	17.3	17.7	55.4	1.8	1.9	6.0	100.0
V1	0.0	0.0	90.9	0.0	9.1	0.0	0.0	100.0
T2	0.0	15.8	16.1	50.5	3.3	3.4	10.9	100.0
V2	0.1	0.0	83.3	0.0	16.6	0.0	0.0	100.0
H1	0.0	90.3	0.0	0.0	0.0	9.7	0.0	100.0
T3	0.0	14.5	14.8	46.5	4.5	4.7	15.0	100.0
V3	0.1	0.0	76.8	0.1	23.0	0.0	0.0	100.0
T4	0.1	13.4	13.5	43.0	5.6	5.8	18.5	100.0
V4	0.7	0.0	70.9	0.1	28.3	0.0	0.0	100.0
H2	0.8	81.6	0.0	0.0	0.0	17.6	0.0	100.0

表-5 せん断中心におけるモード連成比 (%)

	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
T1	0.0	0.0	0.0	90.3	0.0	0.0	9.7	100.0
V1	0.8	1.2	89.0	0.0	8.9	0.1	0.0	100.0
T2	0.0	0.0	0.0	82.3	0.0	0.0	17.7	100.0
V2	8.5	0.0	76.2	0.0	15.2	0.0	0.0	100.0
H1	0.8	87.5	1.8	0.0	0.5	9.4	0.0	100.0
T3	0.0	0.0	0.0	75.6	0.0	0.0	24.4	100.0
V3	8.1	1.0	69.9	0.0	20.9	0.1	0.0	100.0
T4	0.0	0.0	0.0	69.9	0.0	0.0	30.1	100.0
V4	23.3	2.8	52.2	0.0	21.0	0.6	0.0	100.0
H2	27.7	43.2	14.2	0.0	5.7	9.4	0.0	100.0