

Gupta モデルの固有振動数の精度に関する一考察

北海道大学大学院工学研究科	正会員	○ 松井義孝
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	林川俊郎
北海道大学大学院工学研究科	学生員	北島 勉
北海道大学大学院工学研究科	正会員	平沢秀之
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	佐藤浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、その構造物に作用する外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく左右される。したがって、構造物の動的応答を正しく評価するためには、固有振動数ならびに固有振動モードを精度良く計算することが重要な課題であると言える。薄肉断面を有する桁の固有振動解析については多くの研究¹⁾¹⁰⁾が行われている。これらは、Vlasov¹⁾にはじまり薄肉断面桁のねじりやそりねじりに関する振動問題として著書¹⁾等に詳しく述べられている。さらに、Timoshenko²⁾らや Weaver³⁾ら、そして Roberts⁴⁾らにより開断面および一定横断面を有する薄肉桁の鉛直たわみやねじり振動数を求める研究がなされている。Gupta⁵⁾は、テーパ付きとソリッドビームの曲げ振動に関する整合質量法による解法を示している。この方法には、軸方向やねじり振動モードは含まれていない。それら、ねじり振動モードについては、可変開断面薄肉桁を対象に Cywinski⁶⁾によって研究されている。Wekezer⁷⁾は、有限要素法を用い可変開断面薄肉桁の固有振動数を研究している。それらは、支間中央部に向かってフランジ幅や桁高が曲線的に増していく変断面 I 桁や、テーパの付いた片持ちはり (Gupta モデル) の固有振動数を求めている。

一般に構造物の固有振動解析は、部材要素を 2 軸対称の棒部材にモデル化するため要素断面の図心とせん断中心は一致し、曲げ振動とねじり振動は連成しない。しかし、実際の構造部材には薄肉断面が用いられることが多く、1 軸対称断面あるいは 2 軸非対称断面部材の場合には、その図心とせん断中心が異なることにともない曲げ振動とねじり振動が連成する。薄肉断面部材を有する直線桁のそりねじり変形にともなうせん断変形の影響を考慮した固有振動解析に関する研究はまだ少ない様に思われる。

そこで本研究の目的は、薄肉断面桁のそりねじり変形にともなうせん断変形の影響を考慮した固有振動解析を行いその精度について考察することである。具体的には、Gupta モデル⁵⁾をとりあげ集中質量法、整合質量法、シェル要素を用いた有限要素解析および Wekezer による解と比較しそれらの精度について検討する。

2. 固有振動解析

薄肉変断面部材の解析では、モデル化として変断面部材をいくつかの直線部材に分割して重ね合わせる方法が用いられるのが一般的である。例えば、隣り合う要素間で部材の図心軸あるいはせん断中心軸が不連続になる場合があり、各要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを単純に重ね合わせることができない。こういった薄肉変断面部材は、要素両端面上の任意の点に関する剛性マトリックスを選ぶことにより解析が可能となる。

A consideration on accuracy of natural frequencies by using Gupta model. By Yoshitaka MATSUI, Toshiro HAYASHIKAWA, Tsutomu KITAJIMA, Hideyuki HIRASAWA and Koichi SATO

2.1 薄肉変断面部材のモデル化

図-1 に示すような薄肉断面部材において、断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ における変位は、断面不変の仮定より、せん断中心 $S(y_s, z_s)$ の変位を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} u_p(x) &= u_s(x) - y_p \cdot v'_s(x) - z_p \cdot w'_s(x) \\ &\quad + \{\omega_h(y_p, z_p) - y_p \cdot z_s + y_s \cdot z_p\} \cdot \theta'(x) \\ v_p(x) &= v_s(x) - (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \\ w_p(x) &= w_s(x) + (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $u_p(x), v_p(x), w_p(x)$ は、点 P での x, y, z 軸方向変位、 $u_s(x), v_s(x), w_s(x)$ はせん断中心での x, y, z 軸方向変位、 $\theta(x)$ は x 軸まわりの回転角、 $\omega_h(y_p, z_p)$ は規準化されたサンプ

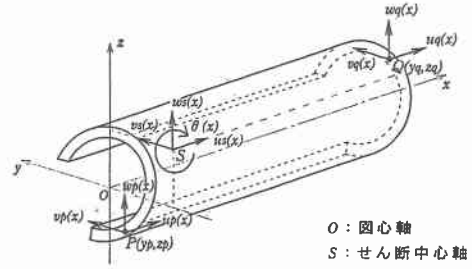


図-1 薄肉断面要素

ナンのゆがみ関数、 $(\quad)' = d/dx$ である。式(1)より、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_s(x) &= u_p(x) + y_p \cdot v'_p(x) + z_p \cdot w'_p(x) - \theta'(x) \cdot \omega_h(y_p, z_p) \\ v_s(x) &= v_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \\ w_s(x) &= w_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \\ v'_s(x) &= v'_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta'(x) \\ w'_s(x) &= w'_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta'(x) \end{aligned} \right\} (2)$$

要素左端の任意点を $P(y_p, z_p)$ 、右端の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とする。点 Q についても式(2)と同様の関係式を導くことができ、要素両端面上のせん断中心の変位は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{su} \\ \mathbf{d}_{ss} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_p] & 0 \\ 0 & [\mathbf{T}_q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_q \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\{\mathbf{d}_{su}\}^T = [u_{su}, v_{su}, w_{su}, \theta_{su}, \theta_{sy}, \theta_{sz}, \theta_{sx}]$ 、 $\{\mathbf{d}_{ss}\}^T = [u_{ss}, v_{ss}, w_{ss}, \theta_{ss}, \theta_{sy}, \theta_{sz}, \theta_{sx}]$
 $\{\mathbf{d}_p\}^T = [u_p, v_p, w_p, \theta_p, \theta_y, \theta_z, \theta_{wp}]$ 、 $\{\mathbf{d}_q\}^T = [u_q, v_q, w_q, \theta_q, \theta_y, \theta_z, \theta_{wq}]$

$$[\mathbf{T}_p] = \begin{bmatrix} 1 & & & z_p & y_p & -\omega_h(y_p, z_p) \\ & 1 & & z_p - z_s & & \\ & & 1 & -(y_p - y_s) & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & -(y_p - y_s) \\ & & & & & 1 & z_p - z_s \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{T}_q] = \begin{bmatrix} 1 & & & z_q & y_q & -\omega_h(y_q, z_q) \\ & 1 & & z_q - z_s & & \\ & & 1 & -(y_q - y_s) & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & -(y_q - y_s) \\ & & & & & 1 & z_q - z_s \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

さらに、 $\theta_y, \theta_z, \theta_w$ はそれぞれ y 軸まわりのたわみ角、 z 軸まわりのたわみ角、およびねじり率を表す。

つぎに、式(3)を $\{\mathbf{d}_s\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{d}_{sq}\}$ と表せば、変換マトリックス $[\mathbf{T}]$ を用いてせん断中心位置における要素剛性マトリックス $[\mathbf{K}_s]$ を、次式のように断面上の任意点における剛性マトリックス $[\mathbf{K}_{sq}]$ に変換することができる。

$$[\mathbf{K}_{sq}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}_s] [\mathbf{T}] \quad (5)$$

要素質量マトリックスについても同様の方法により任意点における要素質量マトリックスを導くことができる。

$$[\mathbf{M}_{sq}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{M}_s] [\mathbf{T}] \quad (6)$$

そこで、式(5)と式(6)を用いて要素境界面上で同一の解析点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを計算しておけば、構造物全体について重ね合わせを行うことができる。離散座標系である集中質量法と整合質量法では、重ね合わせにより組み立てられた構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスを $\mathbf{K}, \mathbf{M}$ とすると、任意点を解析点とする固有振動解析のための振動数方程式は次のような固有値問題に

帰着される。

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (7)$$

ここで、 ω は固有円振動数である。上式の固有値問題はHouseholder法を用いて固有値を求める。また、分布座標系で表示される連続質量法の場合、固有円振動数 ω を含む要素固有剛性マトリックスを式(5)に準じて変換すると、最終的に次の振動数方程式を解くことになる。

$$\det[K(\omega)] = 0 \quad (8)$$

$K(\omega)$ は、構造物全体の固有剛性マトリックスである。式(8)は、Regula-Falsi法により解を求められる。

2.2 せん断変形を考慮した剛性マトリックス

Timoshenkoはり理論は、曲げにともなうせん断変形を考慮した理論であるが、薄肉断面桁の場合はそりねじりにともなうせん断変形を考慮をする必要がある。よって筆者等は、せん断変形を考慮した剛性マトリックスの拡張を検討している。それは、Timoshenkoはり理論の拡張として、せん断補正係数⁸⁾として考慮している。以下に、それらの概要を述べる。

2.2.1. 軸方向変形

軸方向変形に関しては、せん断変形をとめないのこれまでと同様となる。

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 E はヤング係数、 A は断面積、 L は部材長である。

2.2.2. 面外曲げ変形

面外曲げ変形（水平振動）に関しては曲げに伴うせん断変形を考慮して以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} Y_i \\ M_{zi} \\ Y_j \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d & -c & d \\ & e & -d & f \\ & & c & -d \\ sym & & & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 c, d, e および f は、 z 軸まわりの断面2次モーメント (I_z)、 y 軸方向のせん断補正係数 κ_y を含んだ形で以下ようになる。

$$c = \frac{12}{1+\varphi_y} \frac{EI_z}{L^3}, d = \frac{6}{1+\varphi_y} \frac{EI_z}{L^2}, e = \frac{4+\varphi_y}{1+\varphi_y} \frac{EI_z}{L}, f = \frac{2-\varphi_y}{1+\varphi_y} \frac{EI_z}{L}, \varphi_y = \frac{12}{L^2} \frac{EI_z}{G\kappa_y A} \quad (11)$$

2.2.3. 面内曲げ変形

面内曲げ変形（鉛直振動）に関しても同様に、曲げに伴うせん断変形を考慮して以下ようになる。

$$\begin{Bmatrix} Z_i \\ M_{yi} \\ Z_j \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d & -c & -d \\ & e & d & f \\ & & c & d \\ sym & & & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 c, d, e および f は、 y 軸まわりの断面2次モーメント (I_y)、 z 軸方向のせん断補正係数 κ_z を含んだ形で以下ようになる。

$$c = \frac{12}{1+\varphi_z} \frac{EI_y}{L^3}, d = \frac{6}{1+\varphi_z} \frac{EI_y}{L^2}, e = \frac{4+\varphi_z}{1+\varphi_z} \frac{EI_y}{L}, f = \frac{2-\varphi_z}{1+\varphi_z} \frac{EI_y}{L}, \varphi_z = \frac{12}{L^2} \frac{EI_y}{G\kappa_z A} \quad (13)$$

2.2.4. ねじり変形

ねじり変形（ねじり振動）に関する剛性マトリックスは、そりねじりに伴うせん断変形を考慮して以下

のようになる。

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{wi} \\ M_{xj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d & -c & d \\ & e & -d & f \\ & & c & -d \\ sym & & & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{wi} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 c, d, e および f は、そりねじり定数 C_w 、St. Venant の純ねじり定数 J を含んだ形で以下のようになる。 $(G$ はせん断弾性係数)

$$c = \frac{12}{1+\varphi_x} \frac{EC_w}{L^3} + (1+\Phi_x) \frac{GJ}{L}, \quad d = \frac{6}{1+\varphi_x} \frac{EC_w}{L^2} + \frac{1}{2} \Phi_x GJ, \quad e = \frac{4+\varphi_x}{1+\varphi_x} \frac{EC_w}{L} + \frac{1}{12} (1+3\Phi_x) GJ, \\ f = \frac{2-\varphi_x}{1+\varphi_x} \frac{EC_w}{L} - \frac{1}{12} (1-3\Phi_x) GJ \quad (15)$$

式 (15) に含まれる φ_x および Φ_x は、そりねじりに関するせん断補正係数 κ_x を含んだ形で以下のように示される。

$$\varphi_x = \frac{12}{L^2} \left(1 + \frac{J}{J_s} \right) \frac{EC_w}{GJ_s}, \quad \Phi_x = \frac{1+60\alpha_w\varphi_x}{5(1+\varphi_x)^2}, \quad \alpha_w = \frac{EC_w}{GJ_s L^2}, \quad J_s = \kappa_x (I_y + I_z - J) \quad (16)$$

これらの剛性マトリックスを重ね合わせて 14 行 14 列の剛性マトリックスを作成し、これを用いて数値計算を行う。

3. 数値計算

Gupta モデル（ウェブ高さの変化する I 形断面を有する片持ち桁）は、図-2 に示す。本計算におけるモデル化は、集中質量法および整合質量法では支間を 10 等分とした等断面要素ステップモデルを用い、シェル要素モデルの場合は横断面方向にフランジおよびウェブとも 4 等分割、桁軸方向に 50 等分割により固有振動数を計算する。Wekezer の解は、参考論文⁷⁾より参照する。

Wekezer の解は、筆者らと同様に桁軸方向 10 等分割のステップモデルを用い 7 次モードまで求められている。解析に用いる断面定数は、弾性係数 $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ および質量密度は $7.85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ を用いる。計算結果について、モード形態から分析すると表-1 の集中質量法や整合質量法および Wekezer の結果では、第 1, 4, 6, 9 次モードに水平振動、第 3, 8 次モードに鉛直振動、そして第 2, 5, 7, 10 次モードにねじり振動として現われている。一方、図-3 のシェル要素解析では、第 1, 4, 6 次モードに水平振動、第 3, 7 次モードに鉛直振動、第 2, 5 次モードに顕著なねじり振動が現れている。しかし、集中質量法や整合質量法の結果では、第 7 次がねじりモードとして現れているが、シェル要素解析結果ではモード接近により第 8 次モードに鉛直振動とねじり振動の連成振動現象として現れている。さらにそりねじり変形にともなうモード連成は、第 9, 10 次モードにおいても同様である。

つぎに、表-1 から各種解析値の違いによる振動数の精度について述べる。従来筆者らは、振動数の精度

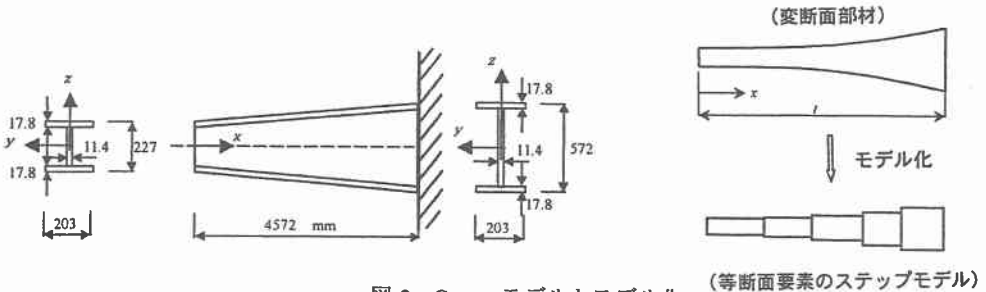


図-2 Gupta モデルとモデル化

表-1 各解法の振動数の比較 (rad/sec)

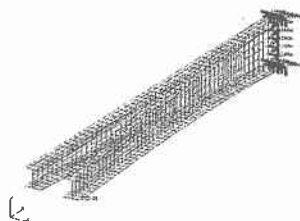
	(せん断変形を無視)		(せん断変形を考慮)		Shell 要素	Wekezer
	集中質量法	整合質量法	集中質量法	整合質量法*		
1st	41.83 -0.594	42.12 0.095	41.79 -0.689	42.08 0.000	41.63 -1.069	42.00 -0.190
2nd	122.63 -0.519	123.50 0.187	122.41 -0.698	123.27 0.000	118.24 -4.080	125.00 1.403
3rd	189.61 2.520	190.23 2.855	184.01 -0.508	184.95 0.000	185.32 0.200	191.00 3.271
4th	247.41 -2.020	254.28 0.701	245.74 -2.681	252.51 0.000	247.85 -1.845	254.00 0.590
5th	403.93 -1.925	414.44 0.628	401.54 -2.506	411.86 0.000	369.58 -10.266	393 -4.579
6th	668.35 -3.653	704.90 1.618	658.29 -5.103	693.69 0.000	626.05 -9.751	704.00 1.486
7th	865.83 2.542	914.97 8.361	807.57 -4.358	844.37 0.000	820.84 -2.787	848.00 0.430
8th	917.10 1.681	954.25 5.800	854.41 -5.270	901.94 0.000	824.54 -8.582	- -
9th	1265.40 -5.608	1378.60 2.835	1232.50 -8.064	1340.60 0.000	860.86 -35.785	- -
10th	1508.70 -6.222	1652.50 2.718	1473.60 -8.404	1608.80 0.000	973.39 -39.496	- -

各モード毎の上段の値は、円振動数 ω (rad/sec) を示す

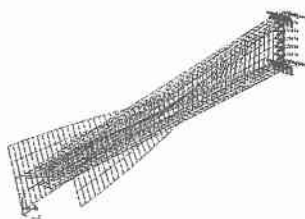
各モード毎の下段の値は、 $(\omega(\text{モード次数}) - \omega^*) / \omega^* \times 100\%$ を示す

ω^* は、せん断変形を考慮する整合質量法による円振動数を示す

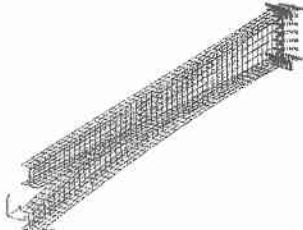
Mode 1 : $f=6.625$ [1/s]



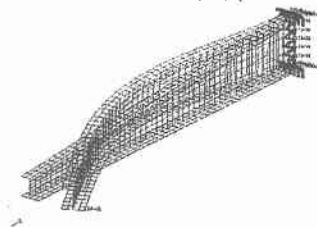
Mode 2 : $f=18.819$ [1/s]



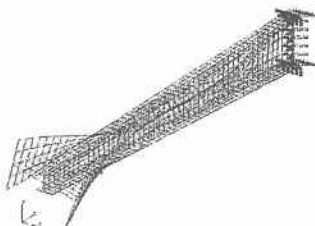
Mode 3 : $f=29.494$ [1/s]



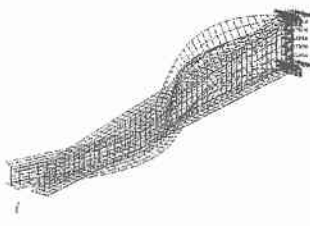
Mode 4 : $f=39.447$ [1/s]



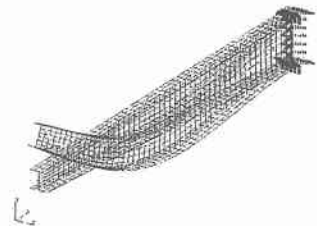
Mode 5 : $f=58.821$ [1/s]



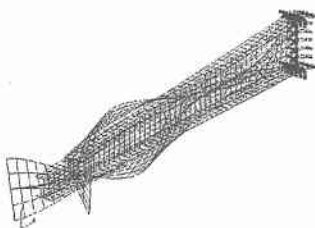
Mode 6 : $f=99.637$ [1/s]



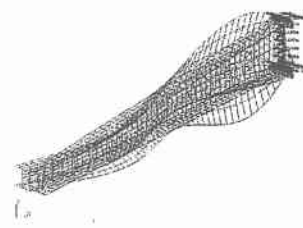
Mode 7 : $f=130.640$ [1/s]



Mode 8 : $f=131.230$



Mode 9 : $f=137.010$ [1/s]



Mode 10 : $f=154.920$ [1/s]

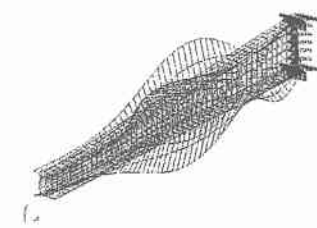


図-3 シェル要素解析によるモード図

を見極める基準値として連続質量法の値を厳密解として扱ってきた。しかしながら、筆者らの研究によると要素分割数を増加させた場合の整合質量法の解も限りなく連続質量法の解と同等であると判断し、ここでは整合質量法をその基準値として扱う。表-1 では、第 1~3 次までは、水平、鉛直、ねじり振動の基本固有振動数であり集中質量法、Wekezer 等による結果との精度は 1%前後である。シェル要素解析では、鉛直、ねじり振動において 4.2%, 2.5%である。第 4~7 次モードでは、水平、ねじり振動の第 2 次および 3 次モードであり、その精度も 5%内外であることがわかる。Wekezer の解と筆者らの関係をみると第 1~7 次まで筆者らとの解の精度は概ね差はないものと判断できよう。さらに、第 8~10 次では、集中質量法の解によると 3.8%~8.2%である。しかし、シェル要素解析では 8.5%~39.5%であり、かなりモード連成による影響がうかがわれる。そりねじり変形にともなうせん断変形の影響については、集中質量法と整合質量法の解を比べるとせん断変形の影響を考慮したした場合が無視した解よりもシェル要素解析の解に近い結果が得られた。これは、三次元振動モード連成としてせん断変形の影響が寄与しているものと考えられる。

4.あとがき

本研究では、薄肉断面桁の解析として Gupta モデルをとりあげた。この変断面桁は、I 形断面を有し桁高のみが直線的に減少するものであり、Wekezer によって解析がなされていた。筆者らは、その数値結果とここで計算された結果とを比較し得られた解の有用性について検討した。Gupta モデルを用いた数値結果は、集中質量法および Wekezer の水平、鉛直およびねじり振動における固有振動数など低次振動レベルでは 1%前後とその精度は高く、同様シェル要素解析でも 1~4%と精度の妥当性がうかがわれる。また、高次モード（9~10 次）において、シェル要素解析からモード連成を確認し精度のばらつきがみうけられる。せん断変形を考慮した解析法は、それらが無視した集中質量法や整合質量法の解よりも考慮した解の方が、よりシェル要素解析に近似していることがわかる。それは、そりねじり変形にともなうせん断変形を考慮した解析を用いることがより厳密な振動挙動を把握するために重要であることとしてうかがいしれよう。

今後の研究課題として、2 軸非対称薄肉開断面を有する直線桁および曲線桁等における固有振動数とその精度について検討する必要がある。2 軸非対称断面桁は図心とせん断中心の位置が異なることから、水平および鉛直曲げ振動とねじり振動とが 3 重連成することになる。よって、これらの固有振動数の精度と連成効果については今後の重要な検討課題となるであろう。

【参考文献】

- 1) Valsov, V. Z.: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation Ltd., 1961.
- 2) Timoshenko, s., P., and Gere, J. M.: Theory of elastic stability, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y. 1961
- 3) Roberts, T. M: Free vibrations of thin-walled bars, J. Engrg. Mech., ASCE, 113(10), pp.1584-1593, 1987
- 4) Weaver, W., and Johnston, P. R.: Structural dynamics by finite element. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1987
- 5) Gupta, A. K.: Frequency-dependent matrices for tapered beams, J. Struct. Engrg., 112(1), pp.85-103, 1986
- 6) Cywinski, Z., and Kollbrunner, C. F.: Neues zu cinem paradoxon des drillknickens, Report No.50, Inst. for Engrg., Res., Zurich. Switzerland, 1982
- 7) Wekezer, J. W.: Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections, J. of Structural Engrg., ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, 1989
- 8) 林 正・岩崎英治: ハイアラキー要素による骨組構造解析, 土木学会論文集, No.570/ I -40, pp. 163-174, 1997
- 9) 林川俊郎・北島勉・松井義孝・佐藤浩一: テーパー付き薄肉 I 形断面桁の三次元固有振動解析, 土木学会北海道支部論文報告集, Vol.55, pp.308-313, 1998.
- 10) 林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一: 薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究, 応用力学論文集, Vol.1, pp.303-310, 1998.