

II-77

閉鎖性水域における密度流の数値計算

北海道大学大学院 学生員 赤堀良介
 北海道大学大学院 正員 清水康行
 北海道大学工学部 学生員 中山 卓

1 はじめに

湖や湾といった閉鎖性水域では、鉛直方向での塩分濃度や水温の違いによって成層化の起こる場合があり、このような水域においては青潮等の流体の密度差が大きく影響する現象が見られる。青潮とは、風によって対流を起こした上層水が下層水を風上側に連行し、密度の境界面が風上で上昇する現象であるが、下層水はおおむね溶存酸素量が減少しているため、一旦青潮が発生すると漁業や周辺の環境に悪影響を及ぼす場合が多い。

また河川の河口部では海域との境界部において潮の干満やゲート操作によって塩水の遡上、流入が発生する場合があるが、このような現象においても流体の密度差とその拡散が流れの中で大きな影響を持つ。

これらの現象の理解、発生する問題の予測や対策の効果算定などにおいて、密度流の数値計算モデルが有効な手段のひとつとして挙げられる。密度流の現象を対象とした数値計算モデルはこれまでも様々に提案されており、筆者らも2次元非圧縮性流体の数値計算モデルを用いて、青潮の発生過程における現象の把握を目的とした、成層化した閉鎖性水域内での吹送による下層水の湧昇などについて数値計算を行ってきた。

しかしながら実際の内海や湖で青潮などが発生する場合は、地形による流速への影響や吹送方向の変化のためにその現象は3次元性を持った複雑なものとなり、鉛直2次元断面の数値計算からだけでは考察できない部分が多く、それらの要素が影響するような場合の現象の把握のためには3次元数値計算モデルの構築が必要とされる。

そこで本研究では、非圧縮性流体における3次元密度流数値計算モデルを提案し、それにより行った計算と実験との比較をすることによりモデルの妥当性を検証することとした。3次元において乱流を数値的に計算していく場合、乱流モデルを用いて計算格子より小さいスケールの渦をモデル化するか、もしくは計算格子をKolmogoroffスケール以下として直接数値計算を行う必要があるが、今回は乱流モデルとして、非定常の流れを計算する場合に効果をもつLES¹⁾を用いた。また基礎式の運動方程式中の移流項の計算にはCIP²⁾法を用いることとした。CIP²⁾法は界面を精度よく捉えることが可能であるため、本論のような密度流の数値計算においては結果の高精度化に有効であると思われる。

2 基礎式

LESによる三次元非圧縮性流体の密度流の計算にあたって、以下のスマゴリンスキーモデルを用いた連続の式(1)と運動方程式(2)、密度の移流・拡散の方程式(3)³⁾を基礎式とする。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + H_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} = -\frac{\partial h_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \right) \tag{3}$$

式中の各文字は以下のように与えられる。

$$P = \bar{p} + \frac{2}{3}q, \quad H_i = -\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_e S_{ij}) + g_i \tag{4}$$

Numerical Calculation of Density Flow in Stratified Lake

by Ryosuke AKAHORI, Yasuyuki SHIMIZU and Suguru NAKAYAMA

$$\nu_e = \nu + \nu_t, \quad \nu_t = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}, \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

$$h_j = -\alpha_t \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}, \quad \alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (6)$$

ただし、計算格子は x, y, z 軸で定義される直交座標上にとるものとし、 t は時間、 \bar{u}_i は流速、 x_i は座標軸、 ν は動粘性係数、 α は拡散係数、 $\bar{\rho}$ は密度、 C_s はモデル定数、 Pr_t はプラントル数、 $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ である。

3 CIP²)法について

本論における一つの特徴である CIP²)法について概略を述べる。ただし実際の計算では 3 次元上での Navier-Stokes 方程式の移流項に CIP²)法を用いたが、ここでは簡単のため一次元の波動方程式 (7) を例にとって説明する。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

これはある物理量 C が、そのままの分布で流速 V によって x 軸上を運ばれていくことを示している (図-1)。

このように C の値はあるプロフィールを保ちながら移動していくが、計算においては各格子点上の値しか知ることができない。そのため、次の時刻のある点での C の値を得るためには、現在の時刻における格子間の C のプロフィールを推定する必要がある。

ここでは式 (8) によって表わされる三次曲線によって、それぞれの格子間のプロフィールを仮定する。

$$F_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + C_i'(x - x_i) + C_i \quad (8)$$

ここで未知数は a_i, b_i, C_i' の 3 つである。CIP²)法では、まず各格子点で値が連続であるという条件と、その一階微分が連続という 2 つの条件式 (9),(10) から式 (11),(12) を得る。

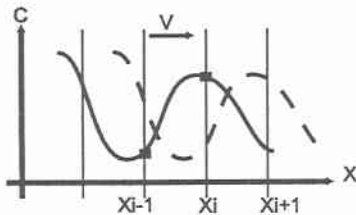


図-1 物理量 C の移流

$$F_i(x_{i-1}) = F_{i-1}(x_{i-1}) \quad (9)$$

$$dF_i(x_{i-1})/dx = dF_{i-1}(x_{i-1})/dx \quad (10)$$

$$a_i = \frac{C_i' + C_{i+1}'}{\delta x^2} - 2 \frac{C_{i+1} - C_i}{\delta x^3} \quad (11)$$

$$b_i = 3 \frac{C_{i-1} - C_i}{\delta x^2} + \frac{2C_i' + C_{i-1}'}{\delta x} \quad (12)$$

以上から a_i, b_i が C, C' によって決定されることがわかる。しかしこの 2 つの式だけでは 3 つの未知数を求めることができないため、もう一つ条件を与える必要がある。

そこで CIP²)法では C_i の一階微分の C_i' も同様に移流していると仮定することにより、(7) 式において C が $C(x, t) = C(x - \delta t, t - \delta t)$ を満たすように、(13) 式において C' が $C'(x, t) = C'(x - \delta t, t - \delta t)$ を満たすと考える。

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + V \frac{\partial C'}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

ここで C, C' を既知数として与えると式 (11),(12) より a_i, b_i が得られる。この a_i, b_i を用いて式 (14)(15) から次の時刻の C^{new}, C'^{new} を求めていくこととする。

$$C_i^{new} = F_i(x_i - V\delta t) = [(a_i \xi + b_i)\xi + C_i']\xi + C_i \quad (14)$$

$$C_i'^{new} = \frac{F_i(x_i - V\delta t)}{dx} = (3a_i \xi + 2b_i)\xi + C_i' \quad (15)$$

ただし $\xi = (-V\delta t)$ である。

実際の計算にあたってはこれらの考え方を 3 次元化し、基礎式中の移流項について分離解法を用いて適用した。

4 計算方法

今回の計算では運動方程式と密度に関する方程式をブジネスク近似⁴⁾を行った上で分離解法を用いて計算する事とした。

まず式(1)(2)(3)をブジネスク近似⁴⁾した後に差分化し、移流項とそれ以外の項に分離する。式(2)についてはさらに二段階分離解法によって、同一の時間ステップでの流速を、圧力項と粘性項とに分離して段階的に求める。この際圧力項の圧力の値は、連続式(1)を満足させるようにSOR法を用いてポアソン方程式を計算することによって求められるが、分離解法を用いると圧力項を含む式には移流項と拡散項が含まれない事になる上、また密度の空間的な変化はブジネスク近似により浮力項にのみ影響し、圧力項には影響しないため、ポアソン方程式が簡単な形となる。この後、移流項の解をCIP²⁾法によって求め、次の時間ステップの流速と密度が得られる。これらの手順を繰り返す事により、逐次的に流速、密度を求めていく。

なお境界条件であるが、底面と壁面において、それぞれの近傍では計算格子が本来必要とされる大きさよりも大きいので、安定のために底面と壁面に平行な流速成分に対し、各壁面、底面とそこから1つ目の計算格子の間に対数則が成り立つとして流速を与えた。また水面は自由水面であるが、今回は水位の変化が十分に小さく、常に一定であると近似できるとする。

5 初期条件

計算を行うにあたっての初期条件を図-2に示す。

長さ1.0(m)、幅0.4(m)の水槽を仕切り板によって分割し、水深0.155(m)で左側には密度 $1000(\text{kg}/\text{m}^3)$ の液体、右側には密度 $1032.8(\text{kg}/\text{m}^3)$ の液体を満たす。時刻0.0(sec)と同時にこの仕切り板は取り外され、液体は自由に移動できるようになるとする。

また各変数はそれぞれ、 $\nu = 0.000001(\text{m}^2/\text{sec})$, $\alpha = 0.0000014(\text{m}^2/\text{sec})$, $C_s = 0.1$, $Pr_t = 0.7$ とし、計算メッシュは x, y, z 軸方向にそれぞれ40, 10, 8とした。



6 実験概要

次に実験概要について図-3に示し、簡単に述べる。

長さ1.0(m)、高さ0.3(m)、奥行き0.4(m)の透明なアクリル水槽を中央で仕切り板によって分割し、水深0.155(m)で、左側には密度 $1000.0(\text{kg}/\text{m}^3)$ の淡水、右側にはメチレンブルーによって着色された密度 $1032.8(\text{kg}/\text{m}^3)$ の塩水を満たす。実験開始と同時にこの仕切り板を取り外し、この様子をデジタルビデオカメラで撮影する。撮影した映像はコンピューターに取り込み静止画像化し、数値計算による計算結果との比較、検証に用いることとする。

また、実際に界面フロントの進入が観察されるような状況においては断面両端は開放された状態として考えられるが、筆者らのモデルは主に閉鎖水域での適用を目的とし、本論の実験はあくまでもその妥当性を検証するための物であるため、今回は計算、実験ともに閉じた系を想定して行った。

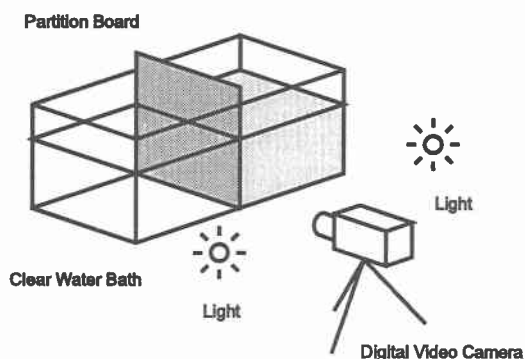


図-3 実験方法

7 計算結果

以下に計算より得られた結果を実験との比較を行いつつ簡単に述べる。本来ならば実験水槽内の流速や密度分布も計測し、それらの値との比較も行うべきであるが、実際にはそれらの数値の計測は困難であり、今回は目視による比較を行うこととした。

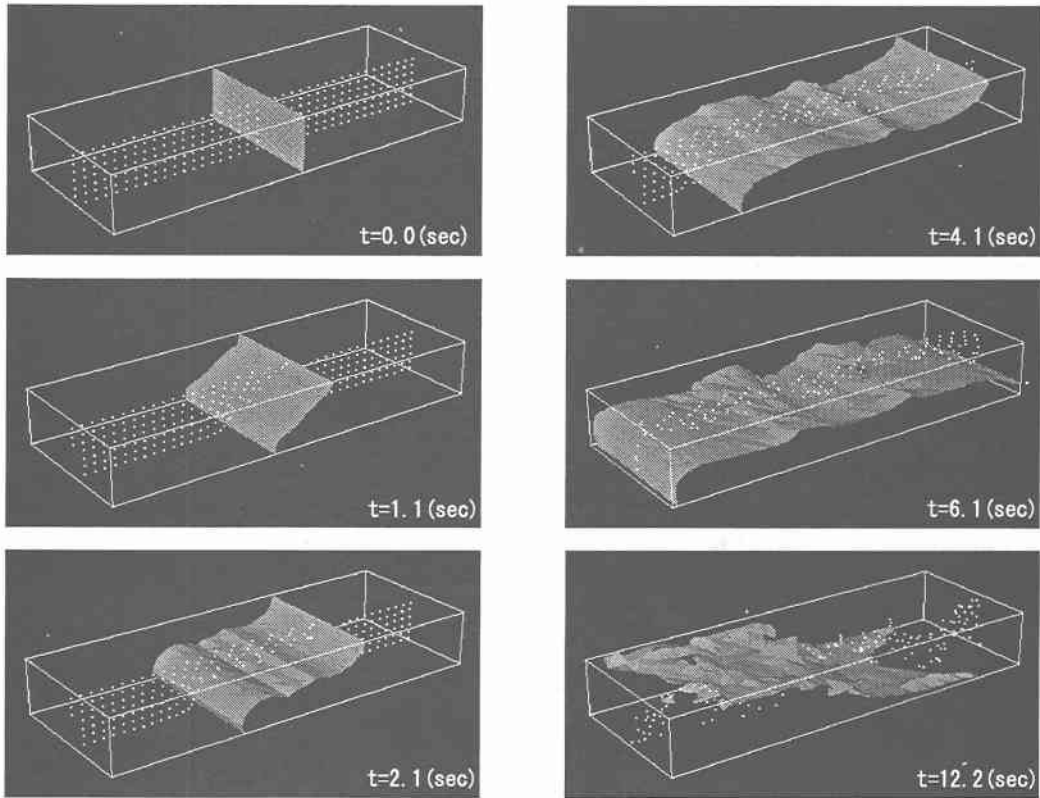


図-4 密度 1016.4(kg/m³) の等値面

計算より得られた各時間ごとの密度 1016.4(kg/m³) の等値面を図-4 に示す。また実験時の側面からの観測結果を図-5 に、計算結果より得られる水路中央の鉛直断面における密度の分布図を図-6 に示す。なお図-4、図-5、図-6 ともに、はじめは図中右側に密度の高い液体があるとし、図-5、図-6 では濃い色の部分ほど密度が高いことを示している。

時刻 $t=0.0(\text{sec})$ とともに界面にはフロントが形成され、断面左端へと進行を開始する。フロントが進行していくと同時に、界面中央付近に二つの大きい膨らみが発達していくが、図-4 の時刻 $t=2.1(\text{sec})$ における様子から、界面に生じた渦が膨らみとなり発達する過程で、その後方において密度を拡散させていると思われる。この間の経緯は図-5 の実験において観察された様子とよく一致しており、モデルの再現性が比較的良好であることが確認される。

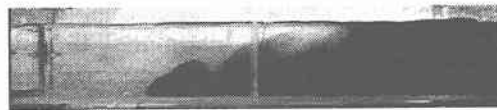
その後フロントは断面左端に達し、時刻 $t=12.0(\text{sec})$ 前後で界面水位が水路左側でもっとも上昇した後、やがて下降をはじめ。しかしながら現在のところモデルの安定性が不十分であるため、内部の乱れが非常に大きくなるこの段階において計算に発散が生じてしまい、実験において確認された周期約 24(sec) の内部セイシュを再現するまでには到らなかった。実際の成層化した閉鎖性水域においてはこの内部界面のセイシュが大きな問題となる場合も多いため、現実的な問題において計算を行う場合はモデルの安定化を行っていく必要がある。



t=0.0(sec)



t=1.1(sec)



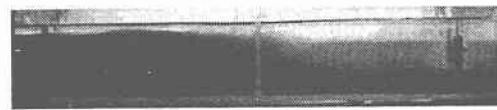
t=2.1(sec)



t=4.1(sec)



t=6.1(sec)



t=12.2(sec)

図-5 実験時の密度分布



t=0.0(sec)



t=1.1(sec)



t=2.1(sec)



t=4.1(sec)



t=6.1(sec)



t=12.2(sec)

図-6 計算による水路中央の鉛直断面の密度分布

8 まとめ

本論文では、閉鎖性水域における密度流の3次元数値計算モデルの構築を目的として、LES¹⁾とCIP²⁾法を併用したモデルを提案し、同様の条件で行われた実験結果と数値計算結果とを比較することにより、その妥当性の検証を行った。

今回の比較方法は目視による実験との比較であり、あくまでも概要的な方法であるが、おおむね良好な再現性が得られたといえる。特に界面せん断力によるものと思われるフロント後方部での渦の発生と成長などに関して、フロント後方で発達した渦が密度の拡散を進行させていくという観察された様子に近い結果が得られた。

しかしながらもう一つのポイントである内部界面のセイシュの再現は、モデルの安定性のためにセイシュを開始する直前の状態で発散が起きてしまい確認することができなかった。内部セイシュは、成層化した閉鎖性水域における実際の環境問題において重要な問題となることが多いため、今回のモデルにおいて計算格子数や時間刻みなどのほか、境界条件や計算と実験の初期条件などについて検討を行う必要があると思われる。

今回の研究を通じて、LES¹⁾とCIP²⁾法を併用したモデルを利用することにより密度界面のフロントの侵入に関して比較的良好な再現計算を行うことができた。今後は先に述べたような問題点を改善していくことにより、このモデルを基本として背潮の発生過程と関連した吹送密度流の研究を行っていく予定である。

参考文献

- 1) 数值流体力学編集委員会 編: 乱流解析, 東京大学出版会, pp67-118, 1995.
- 2) Yabe, T and Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, Comp. Phys. Comm., Vol.66, pp.219-232, 1991.
- 3) 大宮司久明, 三宅 裕, 吉澤 徹 編: 乱流の数値流体力学, 東京大学出版会, pp412-422, 1998.
- 4) 河村 洋, 土方邦夫 編: 熱と流れのシミュレーション, 丸善株式会社, pp47-48, 1995.