

II-69

粒度組成を考慮した中規模河床形態の発生領域区分に関する研究

北海道大学 ○ 学生員 小山 慎一郎
 北海道大学 710-会員 黒木 幹男
 北海道大学 710-会員 板倉 忠興

1. はじめに

沖積地に形成される河床形態のうち、川幅規模のものを中規模河床形態と呼ぶ。河床に砂州が形成されると流れは砂州の存在によって強く影響され、蛇行を引き起こす。流れの蛇行は制御可能な範囲では河川工学上のメリットも多いが、制御を失えば直接災害に結びつくなど問題も生じる。与えられた水理条件が中規模河床形態の領域であるかどうか、すなわち蛇行が生じるか否かが重要な指標となる。

また中規模河床形態は、横断的に存在する砂州の数により単列砂州(交互砂州)と複列砂州とに大きく区分される。交互砂州河床では流水が蛇行しながらも一本の流路を維持できる場合が多い。一方、複列砂州河床においては流れが網状化し利水上の不便が多い。治水の面からも単列砂州河床上の流れに比べ制御が困難である。このように単列砂州、複列砂州の形成限界の解明は河川工学上の問題として重要である。

中規模河床形態の発生・非発生や、単列砂州・複列砂州の形成領域の解析は多くの研究がなされてきた。その中で、線形安定理論を用いた試みは、林¹⁾にはじまりその後多くの研究がある。横断方向の卓越モードを一応理論的に求めたのは Fredsøe²⁾である。その後、黒木ら³⁾により改良が行われ、領域区分図を求めた。さらに福岡ら⁴⁾は、卓越波数の選定に工夫を加えほぼ黒木らと同様の結論に達している。

しかし、中規模河床形態に関する従来の研究においては、ほとんどの場合粒径が一樣な河床材料を用いて行われてきた。実河川ではさまざまな粒度組成の河床が存在しており、本研究では、河床が一樣砂であるか混合砂であるかの相違が砂州の発生領域にどのような影響を与えるのか線形安定理論に基づき検討した。

2. 基礎方程式

直線で川幅が水深に比べて十分大きな水路について考える。両側壁は固定であり、河床材料は非粘着性で、流れによって変形する。流れは疑似定常であり、座標系を図1のようにとる。

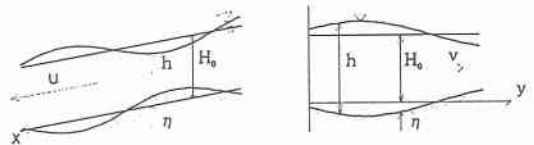


図1 座標系

以上のような仮定で、 x, y 方向に関する流れの運動方程式と連続式、粒度分布に関する定義は以下のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = gS_0 - g \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (2.1)$$

$$-u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial y} (h + \eta) - \frac{\tau_y}{\rho h} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum d_i P_i = d_m \quad (2.4)$$

$$\sum P_i = 1 \quad (2.5)$$

Regime criteria on bars considered the effect of distribution of the diameter
 By Shinichiro KOYAMA, Mikio KUROKI, Tadaaki ITAKURA

混合砂における流砂の連続式は平野ら⁵⁾により以下のように書ける。

$$\Delta \frac{\partial P_i}{\partial t} + P_i \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial q_{iy}}{\partial y} \right) = 0 \quad P_i = \begin{cases} P_i & (\partial \eta / \partial t > 0) \\ P_{i0} & (\partial \eta / \partial t < 0) \end{cases} \quad (2.6)$$

ここで、 u, v は x, y 方向に関する流速、 g は重力加速度、 S_0 は初期平均河床勾配、 h は水位、 η は河床位。
 τ_x, τ_y は x, y 方向の河床せん断力、 ρ は水の密度、 Δ は流砂の移動層厚、 P_i, P_{i0} は流砂中、元河床における粒径 d_i の占める割合 q_{mi} は x 方向に関する粒径 d_i の流砂量、 q_{y_i} は y 方向に関する全流砂量、 d_m は局所的な平均粒径、 λ は空隙率。

無次元線形化を施すために、(2.1)~(2.6) 式で表される諸変量を次式のように基本流に対する基本量(次元量)とそれからの変動成分(無次元量)とに分ける。添え字 0 を付しているのが等流状態における次元を持つ基本量であり、無次元量の変動成分には \sim を付した。

$$\begin{aligned} u &= U_0(1+\tilde{u}), & v &= U_0\tilde{v}, & h &= H_0(1+\tilde{h}), & \eta &= H_0(1+\tilde{\eta}), & \tau_x &= \tau_{s0}(1+\tilde{\tau}_x), & \tau_y &= \tau_{s0}\tilde{\tau}_y, \\ x &= H_0x, & y &= H_0y, & d_m &= d_{m0}(1+\tilde{d}_m), & d_i &= d_{m0}d_i, & \Delta &= \Delta_0H_0, & t &= H_0t/U_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

以上を基礎方程式に代入し、無次元化すると、以下のように表される。

$$F^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + S_0(\tilde{\tau}_x - \tilde{h}) + \frac{\partial(\tilde{h} + \tilde{\eta})}{\partial x} = 0 \quad (2.8) \quad F^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + S_0\tilde{\tau}_y + \frac{\partial(\tilde{h} + \tilde{\eta})}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0 \quad (2.10) \quad P_{i0}\Delta \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} + P_i \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + P_{i0}A_i \left(\frac{\partial \tilde{q}_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_{iy}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\tilde{d}_m = \frac{\sum d_i P_{i0} \tilde{P}_i}{d_{m0}} \quad (2.12) \quad \sum (P_{i0} \tilde{P}_i) = 0 \quad (2.13)$$

ここで、 F はフルード数、 $A_i = \frac{q_{i0}}{P_{i0}(1-\lambda)U_0H_0}$ で表される無次元量。

これらの連立方程式に含まれる変数は、 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}, \tilde{\eta}, \tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{ix}, \tilde{q}_{iy}, \tilde{P}_i, \tilde{d}_m$ であり、粒径を n 分割して考えると、変数は $(8+2n)$ 個存在する。したがってこれらの連立方程式が閉じるためには、方程式があと $(3+n)$ 本必要である。

x 方向の河床せん断力について、Manning-Strickler 型の抵抗則を用いる。これを(2.7)式を用いて無次元化すると

$$\tau_x = \frac{\rho(u^2 + v^2)}{6.9^2 \left(\frac{h}{d_m} \right)^{1/3}} = \tau_{s0} \left(1 + 2\tilde{u} - \frac{\tilde{h}}{3} + \frac{\tilde{d}_m}{3} \right) \quad \tilde{\tau}_x = 2\tilde{u} - \frac{1}{3}\tilde{h} + \frac{1}{3}\tilde{d}_m \quad (2.14)$$

さらに砂粒の斜面上の運動式から黒木ら³⁾により

$$\tilde{\tau}_y = \tilde{v} + \alpha_1 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \alpha_1 = \frac{3}{2} \frac{8(\tau_{s0} - \tau_{c0})^{1.5}}{\mu 6.9 \left(\frac{H_0}{d_m} \right)^{1/6} \sqrt{\tau_{s0}}} \quad (2.15)$$

ここに、 μ は動摩擦係数で、 $\mu=0.5$ とした。 $\tau_{s0} = \tau_{s0} / \rho s g d_{m0}$ は平均粒径における無次元掃流力の基本量、 $s(=1.65)$ は砂粒の水中比重、 $\tau_{c0}(=0.05)$ は平均粒径における無次元限界掃流力。

さらに流砂量 q_{ix} について Meyer-Peter-Muller の流砂量式(2.16)を用いる。

$$q_{ix} = 8 P_i \sqrt{s g d_i^3} (\tau_{xi} - \tau_{ci})^{3/2} \quad (2.16)$$

ここで、粒径 d_i ごとの無次元掃流力 τ_{*i} は、

$$\tau_{*i} = \frac{\tau_b}{\rho g d_i} = \frac{\rho U_0^2 (u^2 + v^2)}{6.9^2 \rho g d_i (H_0 / d_{m0})^{1/3}} (h / d_m)^{-1/3} = \tau_{*i0} (1 + \tilde{\tau}_x) \quad (2.17)$$

で表され、粒径ごとの無次元限界掃流力について、(2.18)式のようにあらわされる浅田式⁹⁾を用いる。

$$\tau_{*ci} = \tau_{*cm0} \left[\frac{\log 23}{\log(2 + 21 \frac{d_i}{d_m})} \right]^2 = \tau_{*ci0} (1 + B_i \tilde{d}_m) \quad B_i = 2 \frac{21 d_{i*}}{2 + 21 d_{i*}} \log(2 + 21 d_{i*}) \quad (2.18)$$

以上をまとめて

$$\tilde{q}_{xi} = \tilde{p}_i + \frac{3}{2} \frac{\tau_{*i0} \tilde{\tau}_x - \tau_{*ci0} B_i \tilde{d}_m}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}} \quad (2.19)$$

が得られる。

一般的に等流状態ではない流れにおいて、河床せん断力と流砂量の間には遅れ距離が存在する。そこで、(2.19)式に遅れ距離 δ を考慮すると、(2.20)式が得られる。

$$\tilde{q}_{xi} = \tilde{p}_i + D_i \left(\tilde{\tau}_x + (-\delta_i) \frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial x} \right) - E_i \left(\tilde{d}_m + (-\delta_i) \frac{\partial \tilde{d}_m}{\partial x} \right), \quad D_i = \frac{3}{2} \frac{\tau_{*i0}}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}}, \quad E_i = \frac{3}{2} \frac{B_i \tau_{*ci0}}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}} \quad (2.20)$$

ここで、遅れ距離は砂粒子の移動距離に等しいとし、それぞれ粒径ごとに Einstein⁷⁾の与えた式(2.21)を本研究では用いた。

$$\delta_i = 100 d_i (1 - \exp(-0.391 / \tau_{*i0}))^{-1} / H_0 \quad (2.21)$$

また、無次元遅れ距離は $\delta_i = \delta_i / H_0$ で表される。

斜面上の砂粒の運動方程式より y 方向の全流砂量 \tilde{q}_y は以下のように表される。

$$\tilde{q}_y = \tilde{v} - \alpha_2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*cm0} \mu}{\tau_{*m0} \mu_c}} \quad (2.22)$$

式(2.8)~(2.13)および、式(2.14),(2.15),(2.20),(2.22)

の(8+2n)本の方程式によって、この連立方程式は閉じていることがわかる。

3. 不安定解析

河床に次式で表されるような、微小擾乱を与える。

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} \cos(l y) \exp\{ik(x - ct)\} \quad (3.1)$$

ただし $\hat{\eta}$ は振幅で、 $c = c_r + i c_i$ は無次元複素位相速度、 $k = \pi H_0 / L$, $l = m \pi H_0 / B$ はそれぞれ x, y 方向の波数、 L は砂州長、 B は水路幅、 m は y 方向の砂州の分割数。 $m=1$ のとき、単列砂州を表し、 $m \geq 2$ のときは複列砂州を表す。

擾乱の振幅が、 $\partial \tilde{\eta} / \partial t > 0$ で河床が不安定となるとすれば、その安定、不安定は kc_i の正負によって判断できる。

(3.1)式で与えられる河床の擾乱により誘起される各変動量を次式のように与える。

$$(\hat{u}, \hat{h}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_m, \hat{d}_m, \hat{p}_i) = (\hat{u}, \hat{h}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_m, \hat{d}_m, \hat{p}_i) \cos(\hat{y}) \exp\{ik(x-ct)\} \quad (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_m) = (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_m) \sin(\hat{y}) \exp\{ik(x-ct)\} \quad (3.2)$$

無次元線形化された基礎方程式に(3.2)式を代入して、まとめると、(3.3)式のような連立方程式の行列が得られる。(3.3)式について、変数である各振幅が有意な解を持つためには、左辺の係数行列の行列式が恒等的にゼロでなければならない。

$$\begin{pmatrix} ikF^2 + 2S_0 & 0 & ik & -4S_0/3 + ik & S_0/3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ikF^2 + S_0 & -l(1+S_0\alpha_3) & -l & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ik & l & 0 & ik & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d_1P_{10} & d_2P_{20} & \dots & d_nP_{n0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10} & P_{20} & \dots & P_{n0} \\ G_1 & A_1l & H_1 & J_1 & K_1 & L_1 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & A_2l & H_2 & J_2 & K_2 & 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_n & A_nl & H_n & J_n & K_n & 0 & \dots & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \\ \hat{h} \\ \hat{d}_m \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$G_i = 2A_i D_i k(1 - \delta_i k), \quad H_i = -ikc + A_i l^2 \alpha_2, \quad J_i = -\frac{1}{3} A_i k G_i (1 - \delta_i k),$$

$$K_i = -\frac{1}{3} A_i k D_i (1 - \delta_i k) - E_i (1 - \delta_i k) A_i k, \quad L_i = -ikc\Delta + A_i k \quad (3.3)$$

4. 結果

(1) 砂州の発生領域区分

係数行列の行列式を計算すると、 x, y 方向の波数 k, l および、粒度組成に関するパラメーター、水理条件に関する互いに独立した2つのパラメータ、(本研究では、無次元掃流力と平均河床勾配を用いた)波速 c によって表すことができる。この行列式を c について注目すると、粒径を n 分割することにより n 次の式となる。

本研究では、水理条件として、平均粒径における無次元掃流力 $\tau_{r, m0} = 0.2$ 、平均河床勾配 $S_0 = 0.01$ 、粒度組成は、5分割して表1および図2であらわされる粒度分布を用いた。以上の条件において行列式=0について解く。

水理条件と粒度組成を与えることにより、残された変数は k と l だけである。縦軸に kc_l をとり k と l の相関面上に描くと図3のようになる。粒径を5分割で取り扱っているので、図3以外に4個の解が得られる。5個の解の中でもっとも振幅の増幅率 kc_l が大きなものが図3で表される解である。他の解においても図3の増幅率より大きな値を取る $k-l$ の組み合わせも存在する。 k, l はその定義より川幅水深比、川幅波長比によって決められる値であり、図3以外の解がより大きな増幅率を取る $k-l$ の範囲においては川幅水深

表-1 粒度分布

d/d_m	0.189	0.377	0.754	1.51	3.02
P_i	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

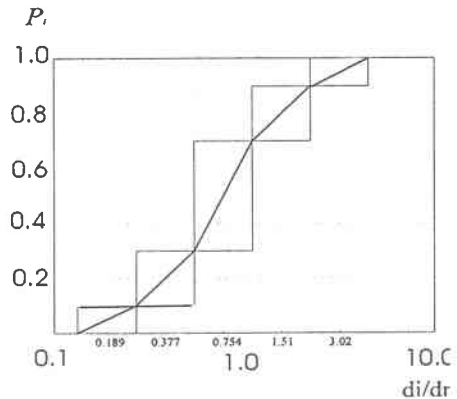


図2 粒径加積曲線

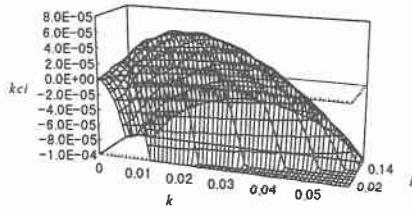


図3 混合砂における増幅率

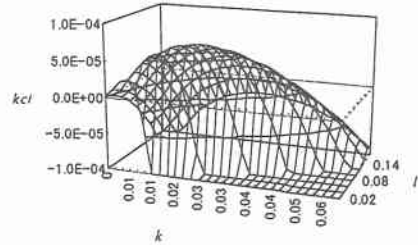


図4 一様砂における増幅率

比、川幅波長比が中規模河床形態の領域から明らかに外れてしまっている。

さらに、一様砂において解析を行った結果である図4と図3の形状はよく似ており、図3の解が有用であるとして、以後図3の解についてのみに注目して解析する。

ところで、 $l = m \pi H_0 / B$ 、 $m = 1, 2, \dots$ であるので l は川幅と水深によって横断的な砂州の波数 m ごとの離散的な値を取る。したがって、増幅率(kc_l)が極大となる $k-l$ の組み合わせが卓越するとすれば、離散的で川幅水深比によって決定される l にしたがって k および kc_{max} は唯一に決められる。 l と kc_{max} の関係を図5に示す。細線は一様砂の結果を表す。ここで、波数に関する特性量ふたつ l_0, l_* を定義する。

$$kc_{max}(l_*) = kc_{max}(2 \cdot l_*) \quad (4.1)$$

$$kc_{max}(l_0) = 0 \quad (4.2)$$

l_0, l_* について以下のようなことが言える。 $\pi H_0 / B > l_0$ である川幅水深比を持つ条件では振幅の増幅率が必ず負の値になるので、砂州の発生しない領域になる。 $\pi H_0 / B < l_*$ のとき $m \geq 2$ なる $m \pi H_0 / B$ が卓越するので、複列砂州の発生領域となる。 $l_* < \pi H_0 / B < l_0$ の条件では、単列砂州の発生領域となることが分かる。したがって、 l_*, l_0 を求めることにより砂州発生領域が求められる。

初期河床勾配0.01における発生領域区分図を図6に描く。太線が混合砂の結果で、細線が一様砂における結果である。

(2) 砂州長と波速

上記で得られた交互砂州の発生領域における l/k の取り得る範囲を計算することにより L/B の変化し得る範囲が求められる。

$$\frac{l}{k} = \frac{\pi H_0 / B}{2 \pi l_0 / L} = \frac{L}{B} \quad (4.3)$$

無次元掃流力と L/B の範囲の結果を図7に示す。2本の太線の範囲が混合砂における L/B の取りうる範囲で、2本の細線の範囲は一様砂における結果である。

同様に、交互砂州発生領域における波速 C_r の範囲を計算し、その結果を図8に示す。

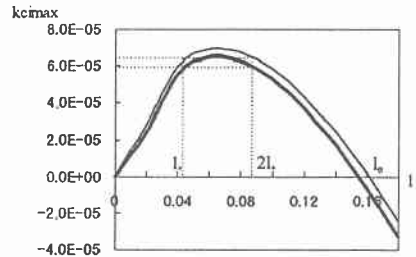


図5 波数 l ごとの増幅率の極大値

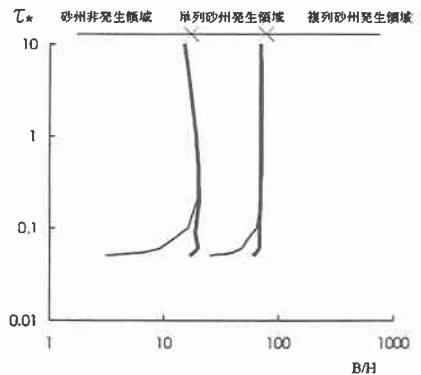


図6 中規模河床形態の発生領域区分

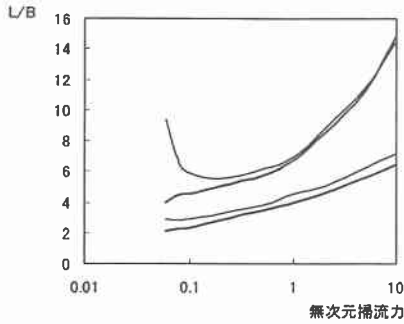


図7 無次元掃流力ごとの L/B の発生する範囲

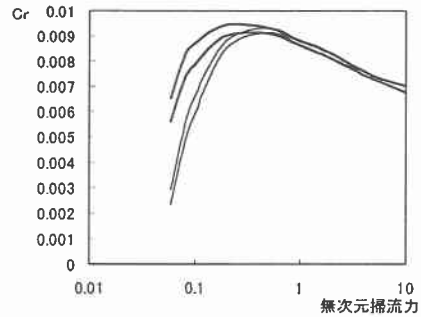


図8 無次元掃流力ごとの波速の範囲

(3) 流砂量中の粒度分布

τ_{*m0} を変化させながら、Meyer-Peter-Muller の流砂量式を用いて各粒径の流砂量を求め、流砂量中の粒度分布を計算する。さらに、元河床の粒度分布も合わせて図 10 に描く。 τ_{*m0} が 0.2 以上のケースでは流砂量中の粒度分布と元河床のそれとはほとんど差が生じなかった。 τ_{*m0} が 0.2 より小さいケースでは、粒径の大きい砂礫の割合が減少してしまい、粒度分布に変化が生じる。

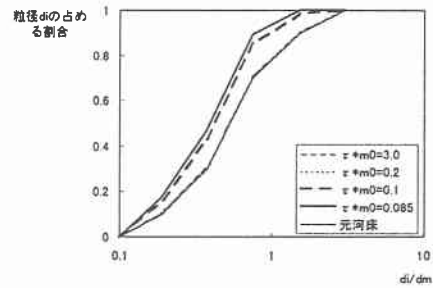


図9 流砂量中の粒度分布

5. 結論

一様砂であることを仮定して解析されてきた線形安定理論に、粒度組成の影響を考慮した。

その結果として、混合砂における砂州の発生領域区分が得られた。また交互砂州発生領域における砂州長、移動速度の取り得る範囲を理論解析的に求めた。

本解析で与えた粒度分布においては発生領域区分、砂州長、移動速度、何れの結果もほぼ一様砂と同様の結果となったが、無次元掃流力がおよそ 0.2 より小さい範囲において相違が見られた。

無次元掃流力が 0.2 以上の範囲では流砂中の粒度分布は元河床の粒度分布をほぼ維持するが、0.2 より小さい範囲では、粒径の粗い砂礫の流砂量の割合が減少してしまい、元河床の粒度分布から極端に外れてしまう。

流砂量の粒度分布が元河床と異なる条件を持つ時においてのみ、線形安定理論に混合砂の影響を考慮しなければならない。

参考文献

- 1) 林泰造：河川蛇行の成因についての研究、土木学会論文報告集、第 180 号、pp.61~70、1970
- 2) Fredsøe, J.: Meandering and braiding of rivers, Jour. Fluid Mech., Vol. 84, Part 4, pp.609~624, 1978
- 3) 黒木ら：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、土木学会論文報告集、第 342 号、pp.87~96、1984
- 4) 福岡捷二ら：平行形状に着目した中規模河床形態の卓越波数と形成領域区分、土木学会論文報告集、第 363 号、pp.115~124、1971
- 5) 平野宗夫：Armorring をともなう河床低下について、土木学会論文報告集、第 195 号、pp.55~65、1971
- 6) 浅田宏：山地河川の流砂量と貯水池における堆砂過程に関する研究、北海道大学学位論文、1974
- 7) Einstein, H.A.: Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, Vol. 107, paper No.2140, p.567, 1942