

II - 56

氾濫流数值計算の安定に関する基礎的研究

北海道大学大学院○学 生 員 宮武治郎
 北海道大学大学院 7x0-会員 黒木幹男
 北海道大学大学院 7x0-会員 板倉忠興

1. はじめに

従来の氾濫水の解析法には、基礎式を差分して数値的に解析する二次元不定流モデルとして、岩佐・井上・水鳥の手法¹⁾が多く適用されてきた。しかし、実際にこの手法を適用するにあたって、大局的には氾濫流をモデル化できるが、流水の先端や初期において流速が過度な値になったりするなど非現実的な挙動を示すことがある。いままで、これらの問題点に関してさまざまな手法が考案されたが、一般的な方法としてはいまだに確立されていない。しかし、このような細かい初期の部分の影響は長期的に影響を及ぼす可能性があるため、それらの点を考慮した方法を確立することは重要である。

そこで本論文では、単純な二次元平面を対象に計算結果に表れた問題点について検討した。

2. 数値解析

2.1 基礎式

氾濫流の計算には、以下に示す連続式、xおよびy方向の運動量保存式を用いた。運動量保存式

$$\text{連続式 ; } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$x \text{ 方向 ; } \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (uM)}{\partial x} + \frac{\partial (vM)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho}, \quad \frac{\tau_{bx}}{\rho} = gn^2 u \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/2}} \tag{2}$$

$$y \text{ 方向 ; } \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial (uN)}{\partial x} + \frac{\partial (vN)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho}, \quad \frac{\tau_{by}}{\rho} = gn^2 v \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/2}} \tag{3}$$

ここで、 u, v ; x, y 方向の流速、 h ; 水深、 H ; 水位、 $M=uh, N=vh$;
 x, y 方向の流量フラックス、 g ; 重力加速度、 ρ ; 水の密度、 $\tau_{bx, by}$;
 河床における x, y 方向のせん断応力、 n ; 氾濫原粗度係数

2.2 差分化

(1),(2),(3)式を差分化するにあたって (x, y, t) 空間を図のように分割し、未知量を M^n, N^n, h^n 、既知量を M, N, h とおき、図1のように配置した。ここで M, N, h の添字 (i, j) は (x, y) 平面での位置を表す。 x, y, t の格子間隔は $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ とする。

摩擦項の取り扱いについては、未知量 M^n, N^n を含むようにした。これは摩擦項に基づく数値計算上の不安定(Vasilievの不安定)を避けるための工夫の結果であり、一次元の流れの場合によく知られている方法である。

対象領域を格子分割するにあたって、領域の境界と接する格子は、格子の種類を変えて表わす。例として西側に境界がある格子を考

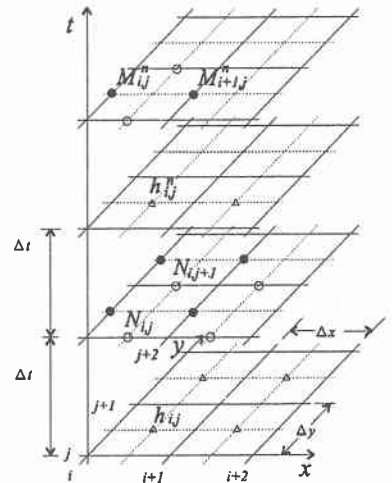


図1 差分スキーム

Study on Stability of Hydraulic Analysis of Flood Flows by Numerical Method

by JIRO MIYATAKE, MIKIO KUROKI, TADAOKI ITAKURA

える。\$M^n = 0\$。次に \$N^n\$ を計算するが、(2)式左辺第 2 項の差分は $\frac{\partial(uN)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \{ (uN)_{i+1,j} - (uN)_{i,j} \}$ なので、\$u_{ij}\$ を求める時、\$(M/h)_{ij}\$ の \$h\$ が境界の外にあり定義できない。そこで、境界での流速 \$u_{ij}=0\$ と考え $\frac{\partial(uN)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \{ (uN)_{i+1,j} - 0 \}$ のように計算する。南側や西側に格子がある場合も同様に計算していく。

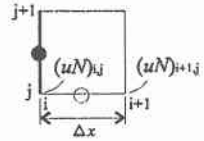


図2 西側境界

先端水の取り扱いには、微小な水深の基準値 (\$\epsilon = 0.001\text{m}\$) を考え、以下の方法を用いた。

- i) 周辺的水位より地盤の高い格子では、前の時間ステップでその格子の水深が \$\epsilon\$ 以下になっていれば、流量フラックス(流入、流出とも)はないものとする。
- ii) 水深が \$\epsilon\$ 以下の格子から流出する流量フラックスが計算された場合には、この流量フラックスを 0 で置き換える。
- iii) 計算される水深が負となった場合には、これを 0 で置き換える。

3. 計算条件と計算結果

3.1 計算条件

- i) 対象地として \$8 \times 8\$ マスの格子を考える。(dx, dy=250m)それぞれの格子の地盤高には一律に 0 を与えた。一次元とみなせるようにするため、図 3 のように左側の全ての格子にそれぞれ \$3\text{m}^2/\text{s}\$ の流入流量フラックスを与えた。
- ii) 初期条件；対象領域全体の水深、流量フラックスは 0 とした。
- iii) マニングの粗度係数；水田・畑地と考え \$n=0.025\$ を与えた。
- iv) 計算時間間隔は \$\Delta t = 0.5\$ 秒とする。

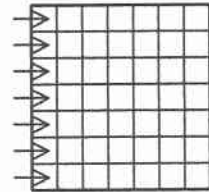


図3 対象地

3.2 計算結果

y 方向の流量フラックス \$N\$ はすべて 0 になり、一次元とみなせる。図 4 に、出力した \$h_1 \sim h_3\$、\$M_1 \sim M_3\$ の対象地での位置について示す。図 5-a, 5-b は \$h-t\$ グラフの 15 秒後と 10 分後、図 6-a, 6-b は \$M-t\$ グラフの 15 秒後と 10 分後を表わす



図4 \$h, M\$ の位置

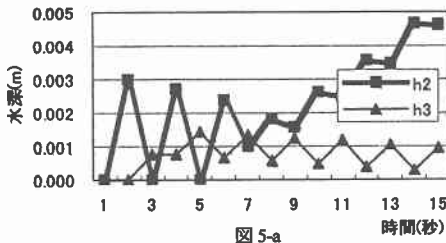


図 5-a

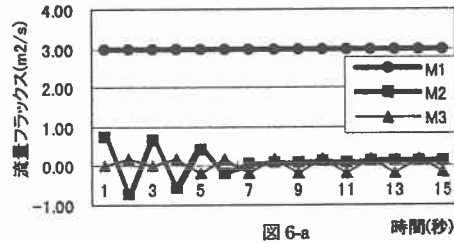


図 6-a

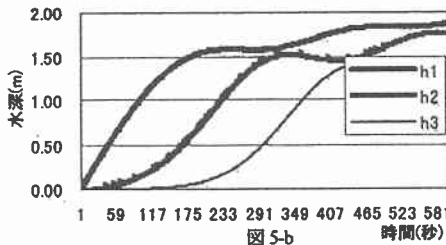


図 5-b

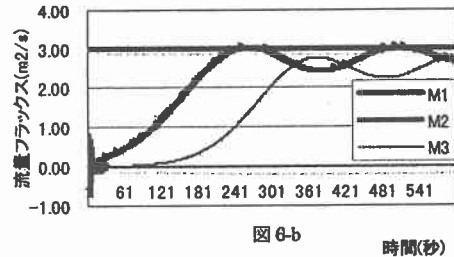


図 6-b

時間(秒)

図7は対象領域の水量の連続性を見るために、流入量と貯留量の比の時間的変化を表わしたグラフである。

図8はある時間での水深を結んだグラフで、2分ごとの水面形を示したものである。表1は、このグラフをもとにした5次の多項式近似曲線から、 $h=1.10\text{m}$ の水面の移動速度を求めてみた。

表2は先端水の流速を計算したものである。

4 考察

4.1 計算結果の検討

図6-bから分かるようにM2がM1(流入流量フラックス)より大きくなったり、M3がM2を上回る時がある。

図5-a, 6-aから水深、流量フラックスの流入初期の振る舞いが不自然である。

表1から全体的に見ると流速は妥当と考えられるが、表2からわかるように、先端水の速度は非常に早く200m/sにも達する。

図7よりわかるが、水量の連続性がやや乱れる。

連続性の乱れは、先端条件のiii)にある負の水深を0で置き換えるという点で発生する。そこで先端条件のiii)を除いたところ、図9のようになった。図7よりこの時の流入量/貯留量はほぼ1.00を示す。

4.2 差分の方法の特性曲線法を用いた検討

連続式および運動方程式から特性曲線法を用いて、先端水における解の安定条件について考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + gl_0 - \frac{\tau_x}{\rho \cdot h} \quad (5)$$

$$Q = uh \text{ より } (4) \text{ は } \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4')$$

$$\text{また、} \quad \frac{\partial h}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = \Delta h \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = \Delta v \quad (7)$$

(4)-(7)式をマトリックス表示し特性曲線を求める。

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 1 & u \\ 1 & u & 0 & g \\ \Delta t & \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & \Delta x \end{pmatrix} = (u\Delta t - \Delta x)^2 - gh\Delta t^2 = 0 \text{ より } \frac{\Delta x}{\Delta t} = u \pm \sqrt{gh}$$

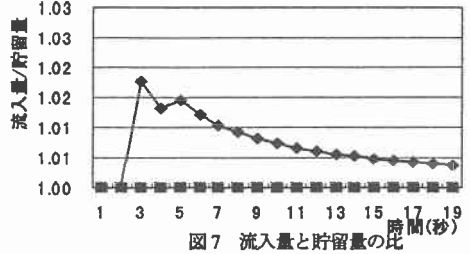


図7 流入量と貯留量の比

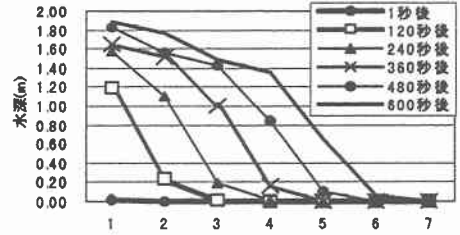


図8 2分毎の水面形

表1 図8での $h=1.10\text{(m)}$ の移動速度

時間(s)	距離(m)	流速(m/s)
240	250	2.083333
360	195	1.625
480	200	1.666667
600	200	1.666667

表2 先端水の流速

時間(sec)	距離(m)	流速(m/s)
1	125	125
2	375	187.5
3	625	208.3333
6	875	145.8333
170	1125	6.617647
318	1375	4.323899
454	1625	3.579295

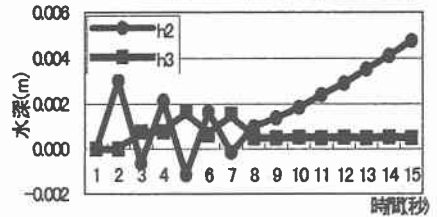


図9 先端条件iii)無しの水深

ここで、先端水は下流側水深の無い流れなので、ダム破壊時水面形との類似性より Ritter による水平床のための解²⁾を使って水面形を求めてみる。厳密解として $h = \frac{1}{9g} \left(2C_0 - \frac{x}{t} \right)^2$, $u = \frac{2}{3} \left(C_0 + \frac{x}{t} \right)$ が得られるので $u(\text{先端}) = 2C_0 = 2\sqrt{gh}$ となる。よって、先端に近いところでは射流になっているので、 $u - \sqrt{gh} > 0$ の特性曲線が水の先端で得られる。

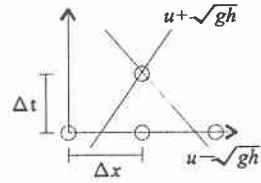


図10 常流の安定条件

常流の場合は、計算点内に特性曲線が入っていれば安定条件を満たすので、中央差分では安定条件を満たす。射流の場合は、中央差分を使用するとき特性曲線は計算点内にあり安定するが余分な情報も含んでしまう。このことから射流のときに中央差分を用いるという点が不都合の可能性があるので、後退差分を利用するほうが適切であると考えられる。水面形のグラフ図8や Ritter の解からも分かるように、先端付近で射流になっているので計算に不都合が出ると考えられる。

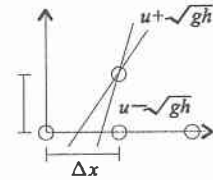


図11 射流の安定条件

4.3 ε についての考察

この解析法では水深が $\epsilon = 0.001\text{m}$ を超えると次のメッシュの水深が計算され

るが、これは物理的には説明できない。また、このために図8で見られるように先端水の速度が過大になる。よって、 ϵ を大きくすることで最初期の先端水の速度を押さえられるのではないかと考え、 $\epsilon = 1\text{m}$ として計算した結果を図12、表3に示す。表3からわかるように先端水の流速は表2($\epsilon = 0.001$)と比べると押えられている。しかし、この場合も Ritter の先端水の計算より先端付近は射流なのでよいモデル化とは言えないが、 ϵ の定め方については研究を進める必要がある。

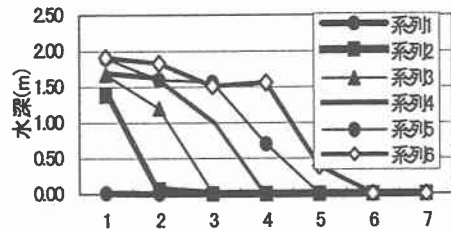


図12 ε=1mの二分毎の水面形

(参考文献)

- 1) 岩佐義郎・井上和也・水鳥雅文：氾濫水の水利の数値解析法、京大防災研究所年報第23号 B-2、1980
- 2) 中川博次・中村重久・市橋義臣：段波の発生とその発達に関する研究、京大防災研究所年報第12号 B-2、1968
- 3) 土木学会編：水理公式集
- 4) 土木学会編：土木工学における数値解析/基礎編

表3 ε=1mの先端水の流速

時間(sec)	距離(m)	流速(m/s)
1	125	125
85	375	4.411765
226	625	2.765487
362	875	2.417127
510	1125	2.205882
663	1375	2.073906
821	1625	1.979294