

II-36

波動場中の円柱のまわりの
非線形流れについて

北見工業大学大学院 ○学生員 山本 拓郎
北見工業大学 工学部 正員 佐藤 幸雄
北海道東海大学工学部 正員 浜 中 建一郎

1. まえがき

この研究の本来の目的は、波動場中に置かれた円柱に働く流体力を求めることであるが、この場合に使用する境界条件として円柱より遠く離れたところのポテンシャル流の流れ場の状態を知る必要がある。そのため、本研究はポテンシャル流の流れ場の状態を線形および非線形の場合について摂動法とグリーンンの積分公式を使用した境界要素法を用いた数値解析により求め、若干の計算結果について比較検討を行ったものである。なお、この場合の数式の誘導過程は、“海岸波動”の弱非線形の問題に大略沿ったものである。

2. 基本方程式

2次元波動場を考えて、流体は非粘性、非回転条件を満たすポテンシャル流とすると流体の速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ に関しては、図-1の座標系に従って、2次元連続の式より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

式(1)に対する境界条件は、底面条件が

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (2)$$

水表面の条件は $z = \eta$ において

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = Q(t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (4)$$

である。次に ϕ , η および Q を, $\varepsilon (\ll 1)$ を使用したべき級数により摂動展開をすると

$$\phi(x, z, t) = \frac{g}{k\omega} \left[\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \right] \quad (5)$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{k} \left[\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots \right] \quad (6)$$

$$Q(t) = \frac{g}{k} \left[\varepsilon Q^{(1)} + \varepsilon Q^{(2)} + \dots \right] \quad (7)$$

ここで ϕ , η および Q は有次元量であり, ε , $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots$, $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots$, $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots$ 等は無次元量である。(k ; 波数, ω ; 角周波数)

ここで、式(3)および式(4)の $z = \eta$ における条件式は非線形であるため、これらの式を静水面上 ($z = 0$) の条件式に近似するため、式(3)および式(4)を Taylor 展開する。

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta - Q \right]_{z=0} + \eta \cdot \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \right]_{z=0} + \dots = 0 \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right]_{z=0} + \eta \cdot \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \right]_{z=0} + \dots = 0 \quad (9)$$

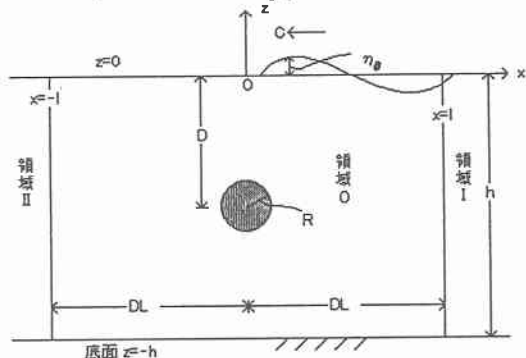


図-1 座標系

Non-linear Flow around a Circular Cylinder in Water Waves,
Takuro YAMAMOTO, Yukio SATO and Ken-ichiro HAMANAKA

式(1)および(2)と式(8)および(9)に式(5), (6) および(7)を代入して ε について整理すると

$$\frac{g}{k\omega} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} \right) + \dots \right] = 0 \quad (10)$$

$$\frac{g}{k\omega} \left[\varepsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \right] = 0 \quad (z = -h) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{g}{k} \varepsilon \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \eta^{(1)} - Q^{(1)} \right] \\ & + \frac{g}{k} \varepsilon^2 \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{g}{2k\omega^2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \eta^{(2)} + \frac{1}{k\omega} \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t \partial z} - Q^{(2)} \right] = 0 \quad (z = 0) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \varepsilon \left[\frac{g}{\omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right] \\ & + \frac{1}{k} \varepsilon^2 \left[\frac{g}{\omega} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} - \frac{g}{k\omega} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{g}{k\omega} \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

式(10)~式(13)中より 1 次オーダー (ε) の関係式を抽出すると,

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (15)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \eta^{(1)} = Q^{(1)} \quad (z = 0) \quad (16)$$

$\eta^{(1)}$ の空間平均を x 軸にとると, $Q^{(1)} = 0$

$$\frac{g}{\omega} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \quad (z = 0) \quad (17)$$

式(16)と(17)より

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (18)$$

$\phi^{(1)}$ に周期解を仮定し, 共役複素数を考慮して

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\phi^{(1)} e^{i\omega t} + \bar{\phi}^{(1)} e^{-i\omega t} \right] \quad (19)$$

$$\eta^{(1)} = -\frac{i}{2} \phi^{(1)} e^{i\omega t} + \frac{i}{2} \bar{\phi}^{(1)} e^{-i\omega t} \quad (20)$$

とおくと, 式(18)より, $\omega^2/g = \Gamma$ として

$$-\frac{i}{4k} \bar{\phi}^{(1)} \left[\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right] \quad (z = 0) \quad (21)$$

式(14), (15)より

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \\ & \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \\ & \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial v} = 0 \quad (\text{構造物上}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

次に, 2 次オーダー (ε^2) の関係式を抽出すると

$$\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \eta^{(2)} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{g}{2k\omega^2} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{k\omega} \eta^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \right) - Q^{(2)} = 0 \quad (z = 0) \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \frac{g}{\omega} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{g}{k\omega} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \right) \\ & + \frac{g}{k\omega} \eta^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

式(25)と(26)より $\eta^{(2)}$ を消去すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\omega}{g} \frac{\partial Q^{(2)}}{\partial t} \\ & = -\frac{1}{2k\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{k} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \right) - \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right] \\ & - \frac{1}{gk} \left[\left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \right) + \eta^{(1)} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \right] \quad (z = 0) \quad (27) \end{aligned}$$

$\eta^{(2)}$ は式(25)で与えられる.

式(27)に式(19)と(20)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\omega}{g} \frac{\partial Q^{(2)}}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{4k} \left[2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \phi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} \right) + 3 \left(\frac{\omega^2}{g} \phi^{(1)} \right)^2 \right] e^{2i\omega t} \\ & \quad + \frac{i}{4k} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{\phi}^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \bar{\phi}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}^{(1)}}{\partial x^2} \right) + 3 \left(\frac{\omega^2}{g} \bar{\phi}^{(1)} \right)^2 \right] e^{-2i\omega t} \\ & \quad - \frac{i}{4k} \bar{\phi}^{(1)} \left[\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

式(28)の右辺は2倍周波数の変動項と定常項で構成されていることから、 $\phi^{(2)}$ の形を次のように仮定する。

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\phi^{(2)} e^{2i\omega t} + \bar{\phi}^{(2)} e^{-2i\omega t} + \xi^{(2)} \right] \quad (29)$$

式(29)を式(28)の左辺に代入して、 $e^{2i\omega t}$ の項を取ると、結局 $\phi^{(2)}$ に関する表面条件式として

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - \frac{(2\omega)^2}{g} \phi^{(2)} \\ &= -\frac{i}{2k} \left[2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \phi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} \right) + 3 \left(\frac{\omega^2}{g} \phi^{(1)} \right)^2 \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \bar{\phi}^{(1)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right] \quad (31)$$

を得る。 $\left(\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \right)$ また $\phi^{(2)}$ に対する基本式と底面

条件は、式(23)と(24)より

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} = 0 \\ & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \\ & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial v} = 0 \quad (\text{構造物上}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

次に、散乱波を考慮しない場合を取り扱うこととして、仮想境界上の境界条件を求める。領域 I (入射波と反射波) での 1 次オーダーのポテンシャル $\phi^{(1)}$ と共役複素数 $\bar{\phi}^{(1)}$ を

$$\phi^{(1)} = \left(e^{ikx} + A e^{-ikx} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (33)$$

$$\bar{\phi}^{(1)} = \left(e^{-ikx} + \bar{A} e^{ikx} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (33) ,$$

とすると、 A は反射率であり、分散関係式は

$\omega = gk \tanh kh$ である。式(33)を式(30)に代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\Gamma \phi^{(2)} \\ &= i \left[\frac{3}{2k} (k^2 - \Gamma^2) e^{2ikx} + A^2 e^{-2ikx} \right] - \frac{1}{k} (3\Gamma^2 + k^2) A \quad (34) \end{aligned}$$

式(34)を満たす $\phi^{(2)}$ は、まず式(34)の右辺を 0 とおいて、1 次オーダーの自由波と同様な 2 次オーダーの自由波 (反射波) のポテンシャル G_1 を

$$G_1 = A^{(2)} e^{-ik^{(2)}x} \frac{\cosh k^{(2)}(z+h)}{\cosh k^{(2)}h} \quad (35)$$

分散関係式は $4\omega^2 = gk^{(2)} \tanh k^{(2)}h$

また式(34)の右辺と同形の拘束波のポテンシャル G_2 を次のようにおく。

$$G_2 = \left[\alpha \left(e^{2ikx} + A^2 e^{-2ikx} \right) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} + \beta A \right] \quad (36)$$

$\phi^{(2)} = G_1 + G_2$

$$\begin{aligned} &= A^{(2)} e^{-ik^{(2)}x} \frac{\cosh k^{(2)}(z+h)}{\cosh k^{(2)}h} \\ & \quad + i \left[\alpha \left(e^{2ikx} + A^2 e^{-2ikx} \right) \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kx} + \beta A \right] \quad (37) \end{aligned}$$

式(37)を式(34)に代入して、 $z=0$ のときの条件より α 、 β を決定すると

$$\alpha = -\frac{3\Gamma \cosh 2kh}{8k \sinh^4 kh}, \quad \beta = \frac{3\Gamma^2 + k^2}{4k\Gamma} \quad (38)$$

同様に、領域 II (透過波) についての条件式は、透過波の 1 次オーダーポテンシャルを

$$\phi^{(1)} = B \cdot e^{-ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (39)$$

$$\bar{\phi}^{(1)} = \bar{B} \cdot e^{-ikx} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (39) ,$$

とおく。式(30)に代入して

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\Gamma \phi^{(2)} = \frac{3i}{2k} \left[(k^2 - \Gamma^2) B^2 \right] e^{2ikx} \quad (40)$$

式(40)の右辺の形より

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= B^{(2)} e^{ik^{(2)}x} \frac{\cosh k^{(2)}(z+h)}{\cosh k^{(2)}h} \\ & \quad + i\alpha' B^2 e^{2ikx} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \quad (41) \end{aligned}$$

とおいて、式(40)に代入し ($z=0$)、 α' を求めると、 $\alpha' = \alpha$ (式(38)) である。

3. 水面形

式(25)を使用して $\eta^{(2)}$ は

式(29), (19)および式(20)を代入して $e^{-2i\omega t}$ の項を除くと

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= -i\phi^{(2)}e^{2i\omega t} \\ &- \frac{1}{4k} \left[\frac{1}{2\Gamma} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right] e^{2i\omega t} \\ &- \frac{1}{4k\Gamma} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \bar{\phi}^{(1)}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \bar{\phi}^{(1)}}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2k} \bar{\phi}^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + Q^{(2)} \\ &= \zeta_0^{(2)} e^{2i\omega t} + \zeta_0^{(2)} \end{aligned} \quad (42)$$

次に、領域 I の $\zeta^{(2)}$ を求めるために、

$\phi^{(2)}$ (式(37)), $\phi^{(1)}$ (式(33)) および $\bar{\phi}^{(1)}$ (式(33'))

を式(42)に代入すると ($z=0$ について)

$$\zeta^{(2)} = -iA^{(2)} e^{-ik^{(2)}x} + \left\{ \alpha + \frac{k^2 - 3\Gamma^2}{8k\Gamma} \right\} \left(e^{2ikx} + A^2 e^{-2ikx} \right) \quad (43)$$

を得る。同様にして、 $\zeta_0^{(2)}$ については

$$\zeta_0^{(2)} = \frac{k^2 + \Gamma^2}{2k\Gamma} A e^{-2ikx} - \frac{k^2 - \Gamma^2}{4k\Gamma} (1 + |A|^2) + Q^{(2)} \quad (44)$$

ここで、 $\zeta_0^{(2)}$ の空間平均を静水面にとると

$$Q^{(2)} = \frac{k^2 - \Gamma^2}{4k\Gamma} (1 + |A|^2) \quad (45)$$

なお、 $\eta^{(1)} = -i \left(e^{ikx} + A e^{-ikx} \right) / 2$

また、領域 II の $\zeta^{(2)}$ については、式(39), (39')

および式(41)を式(42)に代入して、 $z=0$ について求めると

$$\zeta^{(2)} = -iB^{(2)} e^{ik^{(2)}x} + \left(\alpha + \frac{k^2 - 3\Gamma^2}{8k\Gamma} \right) B^2 e^{2ikx} \quad (46)$$

$$\zeta_0^{(2)} = -\frac{k^2 - \Gamma^2}{4k\Gamma} |B|^2 + Q^{(2)} \quad (47)$$

4. 数値解析

図-1 に示す閉領域 (0) におけるポテンシャル $\phi(x, z)$ を求めるために、次のグリーンの積分公式を使用する。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{\alpha} \int_S \left\{ \phi(x_b, z_b) \frac{\partial}{\partial v} (\log r) - (\log r) \frac{\partial \phi(x_b, z_b)}{\partial v} \right\} dS \quad (48)$$

点 (x, z) が境界上にあるとき $\alpha = \pi$ 、領域内部にあ

るとき $\alpha = 2\pi$ 、点 (x_b, z_b) が境界上の点とすると

$r = \sqrt{(x - x_b)^2 + (z - z_b)^2}$ である。境界上を N 個のセ

グメントに分散して、式(48)を離散化すると、

$$\phi_i = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^N \left[\bar{E}_{ij} \phi_j - E_{ij} \frac{\partial \phi_j}{\partial v} \right] \quad (49)$$

ここで、 $E_{ij} = \int_{\Delta S_j} \log r_{ij} dS$ 、 $\bar{E}_{ij} = \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial v} (\log r_{ij}) dS$

いま、境界上の分割数を底面、円柱、水面および

右側と左側の仮想境界上において、それぞれ N_1 、

N_2 、 N_3 および N_4 と N_5 とすると、式(49)を使用

して、境界上の 1 次オーダーポテンシャル $\phi^{(1)}$

および A 、 B を求めるための連立一次方程式は

$$\begin{aligned} -\phi_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{E}_{ij} \phi_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_2} \bar{E}_{ij} \phi_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_3} \{ \bar{E}_{ij} - \Gamma E_{ij} \} \phi_j^{(1)} \\ + \left[e^{-ikl} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} + ikE_{ij} \} Z(k, z_j) \right] A \\ + \left[e^{-ikl} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} + ikE_{ij} \} Z(k, z_j) \right] B \\ = -e^{ikl} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} - ikE_{ij} \} Z(k, z_j) \end{aligned} \quad (50)$$

式中、 $Z(k, z_j) = \frac{\cosh k(z_j + h)}{\cosh kh}$ 、 $\Gamma = \omega^2/g$

式(50)を解いて、境界上の $\phi^{(1)}$ と A 、 B を求めた

後、式(50)を利用して領域内部の点 (x, z) における

ポテンシャル $\phi^{(1)}(x, z)$ を求める。

次に、境界上の 2 次オーダーのポテンシャル $\phi^{(2)}$

を求めるための連立方程式は

$$\begin{aligned} -\phi_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{E}_{ij} \phi_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{N_2} \bar{E}_{ij} \phi_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{N_3} \{ \bar{E}_{ij} - 4\Gamma E_{ij} \} \phi_j^{(2)} \\ + \left[e^{-ik^{(2)}l} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} + ik^{(2)}E_{ij} \} Z(k^{(2)}, z_j) \right] A^{(2)} \\ + \left[e^{-ik^{(2)}l} \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}_{ij} + ik^{(2)}E_{ij} \} Z(k^{(2)}, z_j) \right] B^{(2)} \\ = \sum_{j=1}^{N_3} E_{ij} N_j^{(2)} + H_i^{(2)} \end{aligned} \quad (51)$$

ここに,

$$N_j^{(2)} = -\frac{i}{2k} \left[2 \left\{ \left(\phi_{x,j}^{(1)} \right)^2 + \left(\phi_{z,j}^{(1)} \right)^2 \right\} - \phi_j^{(1)} \left\{ \phi_{z,j}^{(1)} - \Gamma \phi_{z,j}^{(1)} \right\} \right] \quad (52)$$

$$\begin{aligned} H_i^{(2)} = & -i\beta A \sum_{j=1}^{N_4} \bar{E}_{ij} \\ & -i\alpha e^{2ik} \sum_{j=1}^{N_4} \left\{ \bar{E}_{ij} - 2ikE_{ij} \right\} Z(2k, z_j) \\ & -i\alpha A^2 e^{-2ik} \sum_{j=1}^{N_4} \left\{ \bar{E}_{ij} + 2ikE_{ij} \right\} Z(2k, z_j) \\ & -i\alpha B^2 e^{-2ik} \sum_{j=1}^{N_4} \left\{ \bar{E}_{ij} + 2ikE_{ij} \right\} Z(2k, z_j) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\text{式中, } Z(k^{(2)}, z_j) = \frac{\cosh k^{(2)}(z_j + h)}{\cosh k^{(2)}h}$$

$$Z(2k, z_j) = \frac{\cosh 2k(z_j + h)}{\cosh 2kh}$$

1次オーダーの値を用いて式(52), (53)により定数項を求めた後, 式(51)により $\phi^{(2)}$, $A^{(2)}$ および $B^{(2)}$ を決定し, さらに領域内の $\phi^{(2)}$ を求めることができる. 計算条件は, 水深 h で無次元化した値で, $h=1.0$, $DL=3.0$, $R=0.2$, $D=0.3$,

$\eta_0=0.05$ の 1 種類で周期 T を $T=1.0$ と 2.0sec の場合について, 領域内の流速ベクトルと水面形の計算を行った. この場合の境界上の分割総数 N は $N=152$ であり, 左・右仮想境界上の特異点の設定は, 境界上の中央点 ($h/2$) にそれぞれ 1 点ずつとした. 領域内の座標点数 NN は $NN=60 \times 20=1200$ 点である. また, 流速値 u, v は各座標点の $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ を使用して差分により求めた.

計算結果を示すと, 図-2 (a), (b) および (c) は $T=1.0\text{sec}$, 位相 $t=0$ 時の 2 次オーダーまでと 1 次オーダーのみおよび 2 次オーダーのみの水位と流速ベクトル図を示したものであり, 1 次オーダーと 2 次オーダーまで含めた場合と比較すると, 水位については差異は見られるが, 円柱近傍の流速場については, 円柱の左側に若干の差異は見られるが大きな違いはあまり認められなかった. この事は $t=\pi/2$ の図-3 (a), (b), (c) でも同様であり, また $T=2.0\text{sec}$ の場合も 1 次と 2 次オーダーでは明確な差異は見られない. 今後は円柱まわりの座標メッシュを細かくし, さらに詳細な流速ベクトル場を計算する必要がある.

<参考文献> 土木学会編; 海岸波動, PP.176~185

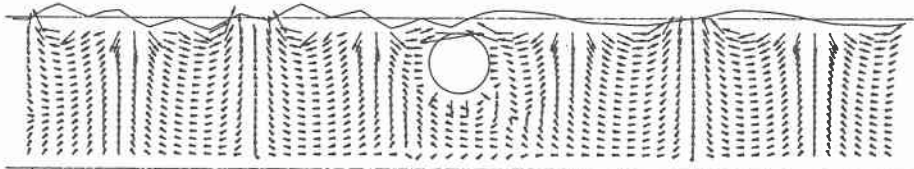


図-2 (a) 流線ベクトルと水面形, (1次+2次)オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=0$

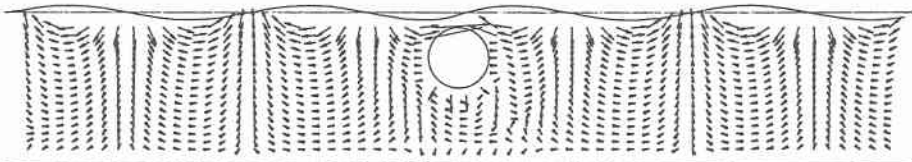


図-2 (b) 流線ベクトルと水面形, 1次オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=0$

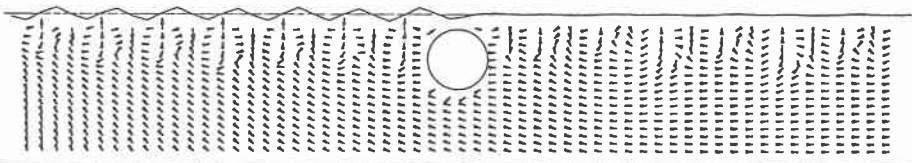


図-2 (c) 流線ベクトルと水面形, 2次オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=0$

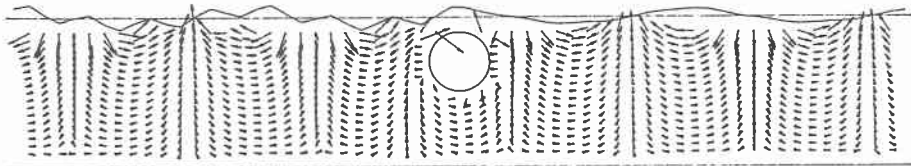


図-3(a) 流線ベクトルと水面形, (1次+2次)オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=\pi/2$

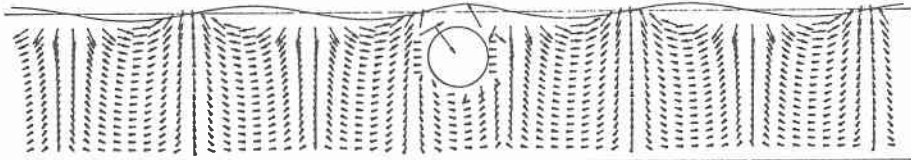


図-3(b) 流線ベクトルと水面形, 1次オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=\pi/2$

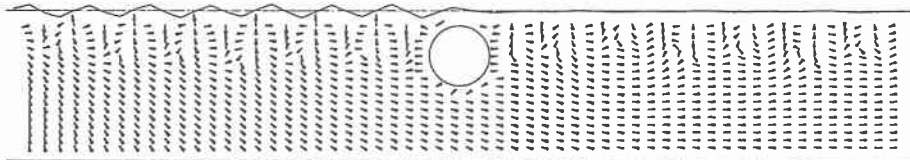


図-3(c) 流線ベクトルと水面形, 2次オーダー, $T=1.0\text{sec}$, $t=\pi/2$

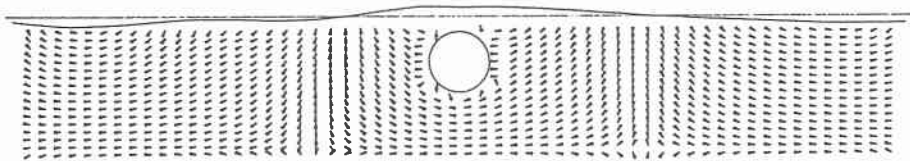


図-4(a) 流線ベクトルと水面形, (1次+2次)オーダー, $T=2.0\text{sec}$, $t=\pi/2$

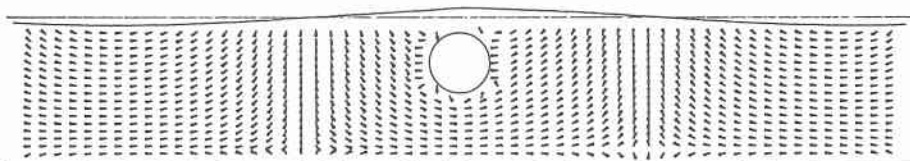


図-4(b) 流線ベクトルと水面形, 1次オーダー, $T=2.0\text{sec}$, $t=\pi/2$

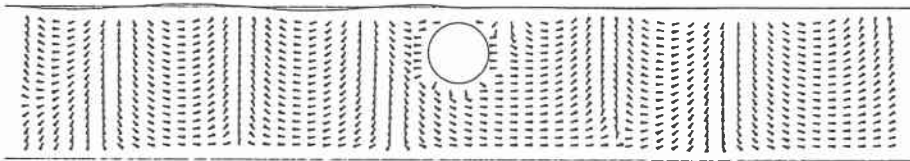


図-4(c) 流線ベクトルと水面形, 2次オーダー, $T=2.0\text{sec}$, $t=\pi/2$