

II-34

矩形港湾内外における波動解について

北見工業大学 大学院○学生員 野村 圭司
 北海道東海大学 工学部 正 員 濱中建一郎
 北見工業大学 工学部 正 員 佐藤 幸雄

1. はじめに

港湾内に停泊している船舶が船体動揺を起こすメカニズムは、基本的には港湾内の副振動による湾水振動および、係留系と湾水振動との共振によるものと考えられる。いずれの場合も、この現象を発生させる最初の原因は港内に存在する長周期波である。この長周期波が港外から侵入してくるものとし、線形近似の基で、単純な形状の港に対し解析的に解いた例として合田(1963)や、一般的な形状の港に対し境界要素法を用いた例として古田(1998)等が挙げられる。一方、港外には高波高の長周期波が存在しなくとも、波の非線形性により長周期自由波が発生する可能性のあることが Bowers(1977)によって示された。この考えの基に、木村(1997)等は、合田(1963)の解を線形解として2次のオーダまで展開することにより、港内に長周期自由波が発生するとした。これらの解析では、2次のオーダでの拘束波(あるいは強制項)が港口部で不連続となり、それを補うように自由波が発生するという考えを基本的な考えとしている。しかしながら、1次波は本来港口部で連続であり、これによる強制項も連続であり、結果的に拘束波が港口部で不連続になることは考えづらい。実際、合田(1963)の解は港口部での連続条件を近似的にしか満たしておらず、線形解自身が港口部で不連続となっている。この不連続性はあくまでも解析の都合上現れたものであり、物理的な不連続性ではない。従って、この不連続性を2次の長周期波の発生原因とすることはできない。

このことから本研究では、合田(1963)と同様な単純な形状の港を対象とし、2次の長周期自由波の解析に必要な港口部での連続性を厳

密にみたす線形解の解析方法を示す。

2. 基礎方程式と境界条件

解析の対象とした矩形港湾モデルは合田のモデルと同じく図-1に示す通りである。流体運動は非粘性、非圧縮、非回転とし、海岸線は直線状に左右無間遠方まで延びている。海岸線および港の境界線では完全反射とし、水深は港の内外共に一定である。以上の条件を仮定する。

速度ポテンシャルを Φ 、水面変位を η とすると基礎方程式は

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1).$$

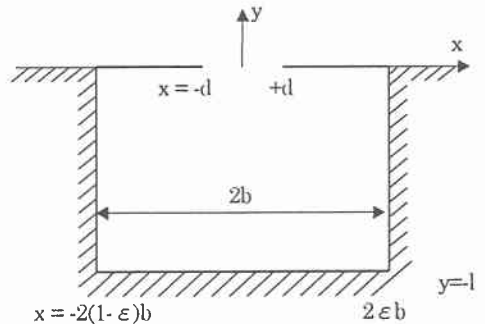


図-1

線形化された水面の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \Phi_z &= \eta_t \quad \text{on } z = 0 \\ \Phi_t + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2).$$

水底 ($z = -h$) での境界条件は

$$\Phi_z = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (2.3)$$

ただし、下付き添え字は微分を表わす。

全ての岸壁、防波堤、海岸(以下水平境界と呼ぶ)で

$$\Phi_{\nu} = 0 \quad (2.4),$$

ここで ν は境界に対する法線を表わす。

水面の境界条件(2.2)から水面変位 η を消去すると

$$\Phi_z + \frac{1}{g}\Phi_{tt} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (2.5).$$

いま、入射波として角周波数 ω の単一波を考えると、波動場の速度ポテンシャルは

$$\Phi = \text{Re}\{\phi e^{i\omega t}\} \quad (2.6)$$

で表わされる。

(2.6)式を(2.1)、(2.5)、(2.4)、(2.3)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_z - \frac{\omega^2}{g}\phi &= 0 \quad \text{on } z=0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{on } z=-h \\ \phi_{\nu} &= 0 \quad \text{on horizontal boundary} \end{aligned} \right\} (2.7).$$

この(2.7)式が ϕ に対する基礎方程式と境界条件を表わす。

ϕ の解として変数分離形、

$$\phi = i \frac{g}{\omega} f(x, y) Z(z) \quad (2.8)$$

を仮定する。

この式を(2.7)の第一式に代入すると以下の Helmholtz の方程式が得られる

$$f_{xx} + f_{yy} + k^2 f = 0 \quad (2.9).$$

また、このとき関数 $Z(z)$ は水面と底面の境界条件を満たす解として

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$$

が得られ、水面の境界条件から分散関係式

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

が得られる。

これまでをまとめると速度ポテンシャルは

$$\Phi = i \frac{g}{\omega} f(x, y) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i\omega t}$$

となり、(2.2)の第二式に代入すると

$$\eta = -\frac{1}{g}\Phi_t = \text{Re}\{f(x, y)e^{i\omega t}\} \quad (2.10)$$

となる。 $f(x, y)$ は水面変位の水平分布を表わすことが分かる。従って、問題は与えられた入射波のもとで(2.9)式と水平境界上の境界条件を満足する f を求めることに帰着する。

3. 港内外の波動場と接続条件

いま、港外を領域I、港内を領域IIとし港外のポテンシャルの分布関数を $f_I(x, y)$ 、港内のそれを $f_{II}(x, y)$ とする。

各々の分布関数は(2.9)式の解であると同時に、以下の境界条件を満たさなければならない。

$$\frac{\partial f_I}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y=0 \quad \text{and } |x| > d \quad (3.1).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{II}}{\partial y} &= 0 \quad \text{on } y=0 \quad \text{and } |x| > d \\ \frac{\partial f_{II}}{\partial y} &= 0 \quad \text{on } y=-l \\ \frac{\partial f_{II}}{\partial x} &= 0 \quad \text{on } x=2(\epsilon-1)b \quad \text{or } 2\epsilon b \end{aligned} \right\} (3.2).$$

接続条件としては港口部で

$$\left. \begin{aligned} f_I &= f_{II} \\ \frac{\partial f_I}{\partial y} &= \frac{\partial f_{II}}{\partial y} \quad \text{on } y=0 \quad \text{and } |x| < d \end{aligned} \right\} (3.3).$$

4. 港内外の波動解と解の接続

4.1 港外の波動場

入射波として角周波数 ω の単一平面波で任意の入射角を持つ波を考えると、その水面変位を η_0 として

$$\eta_0 = \text{Re}\left\{\frac{a}{2} e^{i(\omega t - kx)}\right\}$$

ここで $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ 、 $k_x = k \cos \theta$ 、

$k_y = k \sin \theta$ 、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y$ 、 $k = |\mathbf{k}|$

これに対し反射波は

$$\eta_R = \operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{2} e^{i(\omega t - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})} \right\}$$

ここで $\hat{\mathbf{k}} = (k_x, -k_y)$ を表わし、完全反射波動場は

$$\eta_0 + \eta_R = \operatorname{Re} \left\{ a \cos k_y y e^{-ik_x x} e^{i\omega t} \right\}$$

となる。従って(2.10)式より $a \cos k_y y e^{-ik_x x}$

が入射波の分布関数となる。

港外の分布関数を、入射波による分布関数と港が存在することによる影響を表わす分布関数 $f_r(x, y)$ との和、

$$f_1(x, y) = a \cos k_y y e^{-ik_x x} + f_r(x, y) \quad (4.1)$$

として、この(4.1)式を(2.9)式に代入すると

$$\frac{\partial^2 f_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_r}{\partial y^2} + k^2 f_r = 0 \quad (4.2)。$$

また、(4.1)式を(3.1)式に代入すると

$$\frac{\partial f_r}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad \text{and} \quad |x| > d \quad (4.3)。$$

また、港内の影響 f_r は港口から円筒波状に広がると考えられるから

$$f_r = 0 \quad \text{on} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (4.4)。$$

従って f_r は(4.3)、(4.4)式の条件の下に(4.2)式を解くことにより得られる。

$y > 0$ なるある y の下で x 軸に沿って f_r を考

えると、 $y \rightarrow \pm\infty$ で $f_r = 0$ であるから、 x 軸

に沿って f_r の Fourier 積分が存在すると仮定する。

$$f_r(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, y) e^{-iux} du \quad (4.5)$$

(4.5)式の逆変換は

$$F(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x, y) e^{iux} dx$$

(4.5)式を(4.2)式に代入すると

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (u^2 - k^2)F = 0 \quad (4.6)$$

となり、この(4.6)式の一般解は

$$F(u, y) = C_1(u) e^{\sqrt{u^2 - k^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} \quad (4.7)$$

ここで $|u| > k$ のとき $\sqrt{u^2 - k^2} > 0$ となり、(4.7)式の右辺第一項は発散する。

また、 $|u| < k$ のときは $e^{\sqrt{u^2 - k^2} y} = e^{i\sqrt{k^2 - u^2} y}$ と

なり、 $e^{i\omega t}$ と合わせて考えれば y 軸の負の方向に進行する波となり、港口部から放射状に散乱する波とはならない。

従って、 $C_1 = 0$ となり(4.7)式は

$$F(u, y) = C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y}。$$

よって

$$f_r(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} e^{-iux} du \quad (4.8)。$$

従って f_1 は

$$f_1(x, y) = a \cos k_y y e^{-ik_x x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} e^{-iux} du \quad (4.9)$$

となる。

4.2 港内の波動場

港内の分布関数に対しては、(2.9)式の Helmholtz 方程式の解で、境界条件(3.2)の第二

及び三式を満たすものとして

$$f_{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\epsilon b)\right] \times \cosh \beta_n k(y+l) \quad (4.10)$$

を仮定する。

(4.10)式を(2.9)式に代入すると

$$-\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 + \beta_n^2 k^2 + k^2 = 0 \text{ より}$$

$$\beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2bk}\right)^2 - 1} \quad (4.11)。$$

(4.10)式は(4.11)式の下で(2.9)式、境界条件(3.2)の第二及び三式を満たす。

4.3 港内外の解の接続

港内の解 $f_{II}(x, y)$ の $y=0$ での y 方向の微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{II}}{\partial y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n k A_n \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\epsilon b)\right] \sinh \beta_n k l \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n (x - 2\epsilon b) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \theta_n (x) \end{aligned}$$

ここで $B_n = \beta_n k A_n \sinh \beta_n k l$ 、 $\alpha_n = \frac{n\pi}{2b}$ 、

$\theta_n(x) = \frac{n\pi}{2b}(x - 2\epsilon b)$ である。

接続条件(3.3)の第二式から、港外の

$f_I(x, y)$ に対し、 $y=0$ で(4.1)式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_I}{\partial y} &= \frac{\partial f_r}{\partial y} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \theta_n (x) \quad \text{on } |x| < d \\ &= 0 \quad \text{on } |x| > d \end{aligned} \quad (4.12)。$$

(4.12)式で表わされる $\partial f_r / \partial y$ は明らかに絶対可積分だから Fourier 積分が存在し、

$$\frac{\partial f_r}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{-iux} du \quad (4.13)。$$

この逆変換は

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_r}{\partial y} e^{iux} dx \quad (4.14)。$$

この(4.14)式の右辺に(4.12)式を代入すると

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-d}^d \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \theta_n (x) e^{iux} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{2} \int_{-d}^d \{e^{i\theta_n(x)} + e^{-i\theta_n(x)}\} e^{iux} dx。 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-d}^d \{e^{i\theta_n(x)} + e^{-i\theta_n(x)}\} e^{iux} dx \\ &= 2 \frac{\sin d(u + \alpha_n)}{u + \alpha_n} e^{-i2\alpha_n \epsilon b} \\ &\quad + 2 \frac{\sin d(u - \alpha_n)}{u - \alpha_n} e^{i2\alpha_n \epsilon b} \\ &\equiv 2g_n(u) \end{aligned}$$

とすると

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n g_n(u)$$

となり、(4.13)式はこの $G(u)$ を用いて

$$\frac{\partial f_r}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_n g_n(u) e^{-iux} du \quad (4.15)$$

となる。一方(4.8)式から $y=0$ では

$$\frac{\partial f_r}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\sqrt{u^2 - k^2} C_2(u) e^{-iux} du \quad (4.16)$$

となって、さらに(4.15)式と(4.16)式は一致しなければならない。従って、

$$C_2 = \frac{-1}{\sqrt{u^2 - k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n g_n(u)。$$

以上の結果をまとめると、港内外の分布関数は

$$f_1(x, y) = a \cos k_y y e^{-ik_x x} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2 - k^2}} g_n(u) \times e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} e^{-iux} du \right\} \quad (4.17)$$

$$f_{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{ \cos \alpha_n (x - 2\epsilon b) \times \cosh \beta_n k (y + l) \} \quad (4.18)。$$

ここで B_n は A_n により決定されるが、この

A_n は残された境界条件(3.2)の第一式と(3.3)

の第一式、すなわち

$$\frac{\partial f_{II}}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y=0 \quad \text{and } |x| > d \quad (4.19)、$$

$$f_I = f_{II} \quad \text{on } y=0 \quad \text{and } |x| < d \quad (4.20)$$

を用いて決定される。

5. 係数 A_n の決定法

係数 A_n の決定法として、ここでは吉田(1990)らによる選点法を用いる。

すなわち、境界条件(4.19)、(4.20)式が適用される境界上に適当に点を選び(選点)、その点で(4.19)又は(4.20)式を適用させることにより係数 A_n に関する連立1次方程式が得られ、それを解くことにより A_n が決定される。

はじめに(4.19)式の適用を考える。対象となる選点は図-2に示した白抜ききの点である。

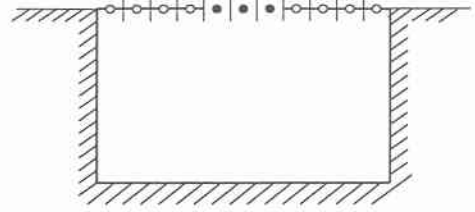


図-2 選点法概念図

(4.18)式を N 項までの展開で打ち切り、

$$\frac{\partial f_{II}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \sum_{n=1}^N A_n B_n' = 0 \quad (5.1)$$

ただし $B_n' \equiv \beta_n k \cos \alpha_n (x - 2\epsilon b) \sinh \beta_n kl$ 。

B_n' は選点の x 座標が与えられれば数値として決まるから、 N_1 個の選点を定めれば(5.1)

式から A_n に関する N_1 個の方程式が得られる。

次に(4.20)式の適用を考える。対象となる選点は図-2に示した港口部での黒塗りの点である。(4.17)、(4.18)式から $y=0$ で

$$ae^{-ik_x x} + \sum_{n=1}^N A_n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_n k \sinh \beta_n kl}{\sqrt{u^2 - k^2}} g(u) e^{-iux} du \right\} = \sum_{n=1}^N A_n \{ \cos \alpha_n (x - 2\epsilon b) \cosh \beta_n kl \} \quad (5.2)。$$

(5.2)式も(5.1)式同様、両辺の $\{ \}$ 内は選点の x 座標が定めれば決まるから、 N_2 個の選点を決めれば A_n に関する N_2 個の方程式が得られる。従って、 $N_1 + N_2 = N$ となる様に選点を定めれば、未知数の数と方程式の数が一致し、連立させて解くことにより A_n は決まる。

6. まとめ

単純な形状の港を対象とし、線形解の解析方法を示した。特徴として、港口部での連続性を厳密に満足するために港口部で内と外の関数とその法線微分の接続条件を与え解析を行なった。また、合田(1963)や木村(1996)等は、港外の波動場の入射波として海岸線と波峰線が平行な一方向の波を与えているのに対して、著者等は単一平面波で任意の入射角を持つ波を与えている。

さらに、従来言われてきた2次の長周期自由波の解析で港口部の不連続性に起因する自由波の発生が、本研究で示した1次波の連続性とそれによる強制項の連続性を用いることにより、自由波の発生メカニズムが港口部の影響によるものは少ないのではないかと考えられる。

参考文献

- 合田良実 (1963) : 長方形および扇形の港の副振動について—フーリエ変換を用いた—解法—, 第10回海岸工学講演会講演集, pp.53-58.
- Bowers, E. C. (1977) : Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, *J. Fluid Mech.*, Vol. 79, part 1, pp.71-92.
- 吉田明德, 小島治幸, 鶴本良博 (1990) : 波動境界値問題におけるポテンシャル接続法の選点解法, 土木学会論文集, No.417/II-13, pp.265-274.
- 木村 晃, 喜田昌裕, 山崎樹実也 (1996) : 2次長周期波による港湾の振動について, 第43回海岸工学講演会講演集, pp.211-215.
- 古田泰久, 野村圭司, 濱中建一郎 (1998) : 境界要素法による苫小牧東港の湾水振動解析, 海洋開発論文集, Vol.14, pp.167-172.