

II-21

広域帯水層における透水係数の空間分布推定

室蘭工業大学 ○学生員 日下 裕貴  
 室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1 はじめに

近年、我が国における重要な水資源の一つである地下水は、経済成長に伴う工業化、都市部における人口の集中などの人為的要因、火山活動などによる自然的要因により汚染、水位低下、水資源枯渇、塩水化等の障害問題を抱えている。また、これらに起因する生態系や自然環境への影響が懸念される。

このような現状において水資源としての地下水開発保全や、建設工事における地盤の安定、自然災害に対する斜面安定等の地下水計画策定のため、数値解析により地下水応答を合理的かつ確実に予測することが重要である。しかし、地下水流動モデルは広範な有効利用の段階には至っていない。この原因はモデルの構造および精度と整合性のある観測データを収集することが困難であることに起因する。このような実状下で限られた地点観測情報から非観測地点の水位、透水量係数、透水係数等の帯水層パラメータを高精度でかつ系統的に推定する手法が必要である。

本研究では、解析領域に散在している地点観測データを用いて、誤差処理にカルマンフィルタ理論、非観測地点の地下水位推定に統計的手法であるバリオグラムとAICを用いて決定したトレンド多項式を適用して、地下水流動解析の主要パラメータの一つである透水係数の空間分布を推定するものである。

2 解析領域の概要

解析対象領域は、図-1に示す北海道石狩・胆振地方を貫流するA川源流部に位置する東西4.4km、南北5.8kmの不圧帯水層である。この地域の地質は最下層がシルト質土で構成され、その上位に支笏降下軽石層、支笏火砕流堆積物層、恵庭・樽前降下軽石層が広く分布し、これらはいずれも高い透水性を有する。この領域では不規則に配置された24個所の自記水位計が設置され1時間毎に定時観測を行なっている。使用データは1996年1月1日から同年3月1日までの61日間とする。

3 非観測地点における地下水位の推定

3.1 観測地下水位の誤差処理

地下水観測値から透水量係数を求める逆問題において、観測誤差が含まれていると、同定すべきパラメータは最適値に収束しない。従って、本研究ではカルマンフィルタ理論の固定区間スムージング<sup>1)</sup>を適用して誤差成分を分離し、観測地下水の平滑推定値を求め、以後の解析において観測値として用いることにした。

3.2 平均地下水位の推定

地下水位 $h$ は観測値に基づき観測期間における平均 $m$ と変動成分 $z$ との和で表されるものとする。

$$h(x, y, t) = m(x, y) + z(x, y, t) \tag{1}$$

平均値 $m(x, y)$ は観測地点毎に異なるため、領域内では空間的トレンドを有する。この空間トレンドは次式で示される座標値 $x, y$ の多項式で表す。

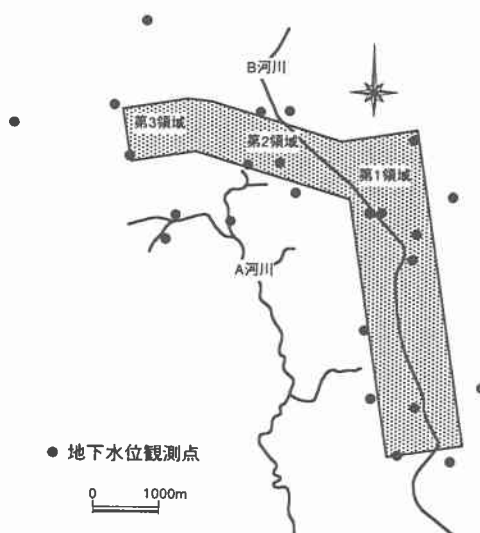


図-1 解析対象領域

A Study on Estimation of Hydraulic Conductivity in Groundwater Field.

by Hiroki KUSAKA, Satoshi TOHMA.

$$m(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + \cdots + a_{k-1}x^n + a_ky^n \quad (2)$$

ここで、 $x, y$  は位置座標、 $k$  はトレンド項数、 $n$  は多項式の次数である。

多項式の次数については必要以上に大きくなると、真の構造ではなく、誤差を忠実に再現することになるため、AIC (Akaike's Information Criterion) <sup>3)</sup> を用いて最適次数を決定する。

### 3.3 地下水位変動量の推定

地下水位の変動成分を確率場における実現値と考え、観測値に基づき統計的手法を用いて非観測地点の地下水位の変動成分を推定する。本解析では、弱定常過程の成立条件を緩和するとともに変動成分の統計的空間分布をより正確に表現できると考えられるバリオグラム<sup>3)</sup>を導入する。バリオグラムは、二点間の状態変数の差の分散を定義するもので、距離  $d$  はなれた二点間の地下水位変動量の差の分散が移動に際し不変とするものであり、次式によって与えられる。

$$\gamma(d) = \frac{1}{2N(d)} \sum_{i=1}^{N(d)} [z(X_i+d) - z(X_i)]^2 \quad (3)$$

ここで、 $\gamma(d)$  はバリオグラム、 $z(X_i)$  は観測地点  $i$  における地下水位変動量、 $d$  は二点間の距離、 $N$  は観測点総数を示す。任意の非観測地点における地下水位変動量は次式で示される線形回帰式により推定を行う。

$$Z^*(X_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i Z(X_i) \quad (4)$$

ここで、 $Z^*(X_0)$  は非観測地点  $X_0$  における地下水位変動量推定値、 $Z(X_i)$  は観測地点  $X_i$  における地下水位変動量観測値、 $\lambda_0^i$  は  $Z(X_i)$  の重み係数である。(4)式が最良不偏推定式となるためには、推定誤差の平均が零の不偏性を有すること、推定誤差の共分散が最小となることの2つの条件を満足しなければならない。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_0^j \gamma(X_i - X_j) + \mu = \gamma(X_i - X_0) \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad \sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1 \quad (5)$$

上記(5)式を解くことにより、線形回帰式の最良重み係数  $\lambda_0^i$  が決定される。一方、この最良線形回帰式による推定誤差の分散は下式で与えられる。

$$\sigma^2 = \text{Var} \left[ Z_0^* - Z_0 \right] = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \gamma(X_i - X_0) + \mu \quad (6)$$

以上の方法で定式化した最良線形回帰式が正しく任意地点の地下水位を推定するには、推定値に偏りがなく誤差の分散が最小でなくてはならない。これを検証するには、各観測地点の地下水位変動量を当該地点を除き他の観測地点の値を用いて推定する。この最良線形回帰式が適切に選定されている場合、(7)式で表される誤差平均は0となり、(8)式で表される観測値の分散と(6)式の推定誤差分散の相対比は1となる。

$$E \left[ Z_i^* - Z_i \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ Z^*(X_i) - Z(X_i) \right] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ Z^*(X_i) - Z(X_i) \right\} / \sigma^2 = 1 \quad (8)$$

ここで、 $N$  は観測点総数を示す。

## 4 透水量係数の推定

3章で得られた地下水位から透水量係数の空間分布を推定する。本解析では次式で示される平面二次元定常地下水流動方程式に関して非線形最小二乗による最適化手法を用いて推定する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x,y) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T(x,y) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (9)$$

ここで、 $h$  は地下水位、 $T$  は透水量係数、 $Q$  は涵養量または揚水量、 $x, y$  は平面座標を示す。観測地点における透水量係数の最適値は観測地下水位に対するモデルによる計算地下水位の残差平方和を最小にするものと考え、最適解を探索するための評価基準<sup>4)</sup>として次式を採用する。

$$I(T) = \sum_{i=1}^N W_i \left[ h_i - \hat{h}_i(T) \right]^2 \quad (10)$$

式中の  $I$  は評価基準、 $h_i$  は推定地下水位、 $\hat{h}_i(T)$  は計算地下水位、 $W_i$  は重みで  $W_i = 1$  とする。

(10)式を透水量係数  $T$  に関して最小化を行う。しかし、この場合、地下水位は透水量係数の関数であり、非線形となるため直接解を求めることができない。そこでテイラー展開を行い、一次項のみを考慮した線形近似式を考え、反復改良法により残差平方和を最小にする透水量係数を求める<sup>5)</sup>。

## 5 透水係数の推定

4章で得られた透水量係数より透水係数の空間分布を推定する。透水係数は下式で示されるように透水量係数を地下水の水深で除したものである。

$$k = T / H = T / (h - B) \quad (11)$$

ここで、 $k$ は透水係数、 $T$ は透水量係数、 $H$ は地下水の水深、 $h$ は地下水位、 $B$ は地盤高である。

水深 $H$ は地下水位 $h$ から地盤高 $B$ を差し引いたものであるため、地盤高 $B$ を推定しなければならない。 $B$ は平均地下水位を推定するのと同様に(2)式で示す座標値 $x, y$ の多項式で推定する。

## 6 解析結果と考察

### 6.1 非観測地点における地下水位の推定

非観測地点の地下水位は(2)式の多項式で求めた平均地下水位とバリオグラムから得られる(4)式の変動量との和とする。本研究では解析領域が広いため領域を図-1で示すように東側から第1領域、第2領域、第3領域の3つに分けて解析を行う。平均地下水位に関してはAICにより第1領域では2次多項式、第2領域では4次多項式、第3領域では3次多項式が最適同定された。地下水位変動量に関しては、(3)式で示す観測バリオグラムを求めめるため、観測点間の距離を660m刻みで階級分けを行った。刻み660mは階級に入る度数がほぼ等しくなるように試行錯誤的に決定した。得られたバリオグラムの計算結果を図-2に示す。観測バリオグラムは距離約3,600mまでほぼ線形を有していることが認められる。従って、(4)式を用いて非観測値点の地下水位の変動量を推定する際、すべての観測値を用いる必要はなく、推定する地点から半径1,800mの円に内在する観測点の値のみ(4)式に適用すると良いことになる。この方法により(5)式の項数が減少し、計算時間の短縮が図れ、同時に不確実性が低減される。

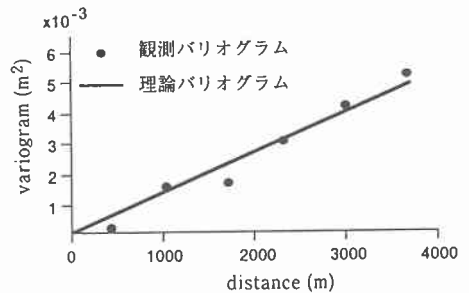


図-2 理論バリオバリオグラム

図-2に示す観測バリオグラムに基づき回帰式を求めると、地下水位変動量の理論バリオグラムは次式で与えられる。

$$y(d) = 1.4361 \times 10^{-6} d \quad d \leq 1800 \text{ m} \quad (12)$$

上式が正しく変動量を推定し得るかを検証するため、各観測点の地下水位を当該点を除いて推定する。この結果(7)式の偏差は0.006であり、(8)式の相対分散比は1.07となる。従って、(12)式で表される本理論バリオグラムは許容し得る誤差内で変動量を推定できることが認められる。ここに、推定地下水位空間分布を図-3に示す。

第2領域、第3領域においてはA川源流部に向かい急激に水位低下が認められる。また、第1領域では領域中央部にB川が貫流しているが、地下水位に影響を与えていない。これは冬期間における湧水、凍結によるものと思われる。地下水位は北から南に向かい17.0mから8.0mまで順次遞減している。

### 6.2 透水量係数の空間分布の推定

解析領域を第1領域、第2領域では1,679節点、1,584要素、第3領域では851節点、792要素の小矩形要素に分割する。透水量係数の推定は領域の境界節点に推定地下水位を与えて、内部節点における地下水位を計算し、誤差が許容し得る範囲に入るまで計算を繰り返す。ここでは許容誤差は各節点当たり4mm以内とする。(9)式における涵養量 $Q$ は使用したデータが冬期間であり降雪、上層面凍結が生じるため、地表からの流入は無いものとした。透水量係数の初期条件は以前に近隣領域で行った解析結果を参考とし $3.000 \text{ m}^2/\text{day}$ とした。

第1領域では $2810.86 \text{ m}^2/\text{day}$ から $3374.58 \text{ m}^2/\text{day}$ 、第2領域では $1965.34 \text{ m}^2/\text{day}$ から $5257.74 \text{ m}^2/\text{day}$ 、第3領域では $1953.16 \text{ m}^2/\text{day}$ から $4383.15 \text{ m}^2/\text{day}$ の範囲の値を示し、場所ごとに大きな変化をしていることが認められる。特に第2,第3領域においては地盤標高の著しい変化や帯水層の複雑な分布特性に起因して、複雑な分布を呈しているものと思われる。

### 6.3 透水係数の空間分布推定

前節で推定した透水量係数 $T$ と水深 $H$ に基づき算定した透水係数を図-4に示す。透水係数は $52\text{m/day}$  ( $0.06\text{cm/s}$ )から $208\text{m/day}$  ( $0.24\text{cm/s}$ )の範囲にあり、これは火山灰の透水係数に相当し、解析領域の地質特性と一致する。

第2,第3領域の中央部では地質構成にシルト質土が含まれているため鉛直方向に関する平均透水係数は低くなっている。上(北)部において透水係数が高い値になっているのは、地質に砂質、砂礫が咬んでいるためと思われる。下(南)部では急激に透水係数が高く、地下水が集中している。この部分はA川源流部であり崖を形成しており、この崖面から細かい粒子が抜け出て高い透水性を有しているものと思われる。

第1領域上(北)部では、透水係数の分布がシルト質土のレンズ形状に反映したものになっている。中部、下(南)部にかけてA川支川源流部方向に向かい高い値になっている。これは第2,第3領域下(南)部と同じ現象が起きているものと思われる。図-4において●で示す地点で行われた揚注水試験で得られた透水係数は $95\text{m/day}$  ( $0.11\text{cm/s}$ )であり推定結果( $101.7\text{m/day}$ ,  $0.118\text{cm/s}$ )とほぼ一致している。

### 7 まとめ

地下水位の観測誤差の影響を最小限にするため、カルマンフィルタを用いて地下水位データの誤差成分を分離することにより、モデルの精度に整合するデータを得ることができた。また、地下水位を平均地下水位と変動量の和であると考え、平均地下水位の空間トレンドを多項式で算定し、変動成分に対しバリオグラムを導入して求めた。その結果、信頼性のある地下水位の空間分布推定を広範囲において行うことができた。推定地下水位を用いて現地に即した透水係数の分布構造を把握することができ、地下水流動および汚染物質輸送機構を究明するための基礎的データを提示することができた。

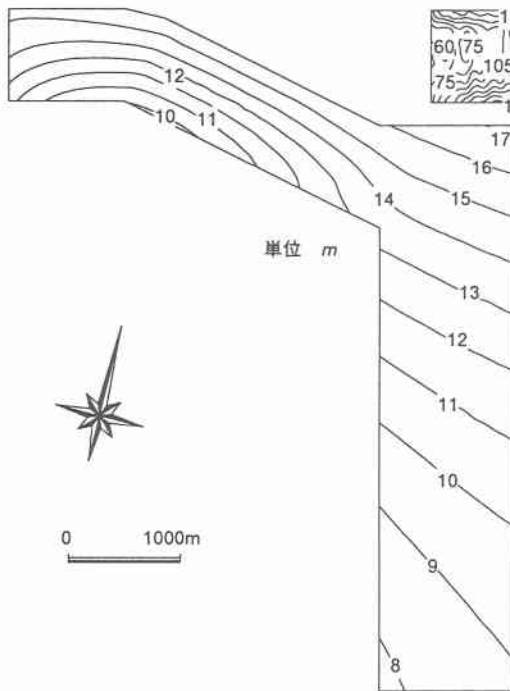


図-3 推定地下水位空間分布図



図-4 推定透水係数空間分布図

### 参考文献

- 1) 片山 徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，pp.117-132,1983.
- 2) 林 知己夫，鈴木達三，赤池弘次：統計学特論，情報量基準と統計モデル・統計的社会調査法，日本放送出版協会，pp.9-45,1986.
- 3) Delhomme J.P.: Kriging in the Hydrosociences, Ad. Water Resour., 1-5, pp.251-266, 1978
- 4) 藤間 聡：統計的線形手法による透水係数の空間分布推定，第30回水理講演会論文集，pp.301-306, 1986.
- 5) 中川 徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，pp.97-106, 1983.