

II-18

成層場における内部波に関する検討

北海道大学大学院 ○正 員 中山恵介
北海道大学大学院 学生員 佐藤圭洋

1. はじめに

ダムや湖沼において、富栄養化に見られる生態系を考慮した研究を行う際、簡便さの点から、これまで1次元多層モデルが用いられてきた。現在、2次元、3次元での計算が開発されるようになってきたが、湖沼での内部波等に代表される、グリッドスケール以下でのモデル化が容易ではない。以上のことから、内部波が湖沼内において及ぼす影響を知ることが、重要であると考えられる。

これまで、内部波、内部セイシュに関して行われた研究として、以下のものがあげられる；二層モデルによる実験を行い、オーバーターンが内部波の節で卓越して発生することを示したもの¹⁾、内部セイシュと内部波状跳水を実在する湖で観測したもの²⁾、二成層場での孤立波の実験を行い理論解との比較を行ったもの³⁾、波状跳水の発生条件を理論と実験により検討したもの⁴⁾、二成層ではあるが密度の不連続面を連続として Korteweg-de Vries 方程式を適用し実験とのよい再現結果を得たもの⁵⁾、風による応力を水面上にベルトにより発生させ3層モデルとの比較を行ったもの⁶⁾、連続成層場で生じた内部波が斜面に臨界状態で作用する際の共振現象を調べたもの⁷⁾、連続成層場でのオーバーターンについて実験、解析を行ったもの⁸⁾、連続成層場の混合によるエネルギーについて検討を行ったもの⁹⁾、成層場に斜面上を流下して進入してくる傾圧成分の混合について実験を行ったもの⁹⁾等である。

以上、非常に多くの研究が存在する中でほんの一部である。これらの研究で、内部波と内部セイシュによる構造がかなり明らかにされてきたといえるが、それを応用した二層モデルでの数値計算による湖沼での検討はほとんど無い。そこで本研究では、これまでに著者が開発してきた浅水流モデル¹⁰⁾¹¹⁾を二層モデルに拡張し、基礎的な研究として、その理論解との適合性を検討することを目的とする。

2. 二層モデル

二層モデルの基礎方程式を式(1)～式(5)に示す。本論文では、内部波の影響に注目するため、エネルギーの減衰に関係する摩擦等の項は省略した。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \{h_{12}(u_1 - u_{12})\} & (1) \\ \frac{\partial u_{1i}}{\partial t} + u_{1j} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} &= -g \frac{\partial h_1}{\partial x_i} - g \frac{\partial Z}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial x_j^2} & (2) \end{aligned} \right.$$

表-1 テストケースでの計算条件

			備考
短軸長	B	500m	一定幅
長軸長	L	2250m	一定長さ
摩擦速度	u_*	0.0100m/s	一定値
	ε	0.0300	一定値
表水層水位	h_1+Z	30.0m	一定値
深水層水位	$h_{12}+Z$	25.0m	case1a
		20.0m	case2a
		15.0m	case3a
		10.0m	case4a
		5.0m	case5a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h_{12}}{\partial t} + \frac{\partial(u_{12} h_{12})}{\partial x} &= 0 & (3) \\ \frac{\partial u_{12i}}{\partial t} + u_{12j} \frac{\partial u_{12i}}{\partial x_j} &= -(1-\varepsilon)g \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \\ -(1-\varepsilon)g \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \varepsilon g \frac{\partial h_{12}}{\partial x_i} - \varepsilon g \frac{\partial Z}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u_{12i}}{\partial x_j^2} & & (4) \end{aligned} \right.$$

$$\varepsilon = \frac{\rho_{12} - \rho_1}{\rho_{12}} \quad (5)$$

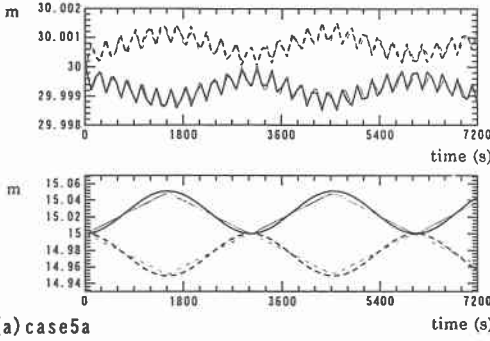
ここで、添え字 i, j は 1, 2 の値を取りそれぞれ x, y に対応、 h_1 : 湖底から水面までの水深、 u_1 : 表水層流速、 Z : 基準面から湖底までの高さ、 v : 動粘性係数、 h_{12} : 湖底から密度界面までの水深、 u_{12} : 深水層流速、 ρ_1 : 表水層密度、 ρ_{12} : 深水層密度である。

計算手法は、前述の参考文献¹⁰⁾¹¹⁾によるものとするが、後の節で現れるが内部フルード数が1近くなる場合が存在することから、SGS効果を考慮したCIP法と差分計算とを用いた分離解法であることのみ記す。

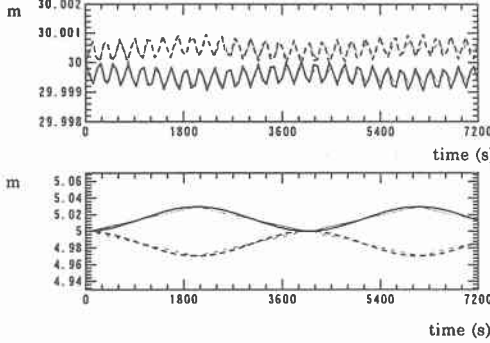
3. セイシュと内部セイシュ

数値計算の精度を検証するために、式(1)～式(5)までの表水層の水深と流速、深水層の水深と流速の近似解析解である式(6)～式(17)と、数値計算結果との比較を、表-1に示す長方形の形状を持つテストケースで行う。但し、計算は表に示された5ケースで行ったが、表水層の水深の解析解が、 $h_{12} \rightarrow h_1$ となると適合性が悪くなること(その他、深水層水深、表水層流速、深水層流速はほぼ一致するが)を考慮して、case3a、case5aについてのみ比較を行う。

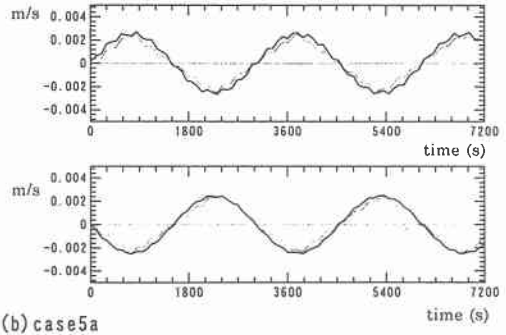
(a) case3a



(a) case5a



(b) case3a



(b) case5a

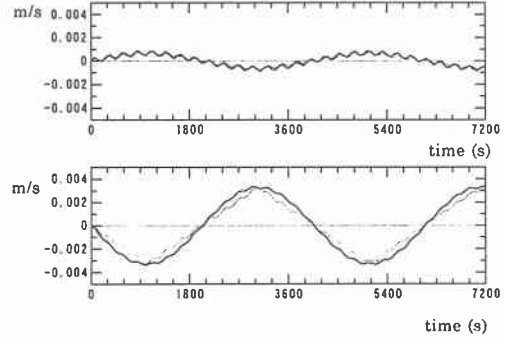


図-1(a) (b) (a) 水面水位と界面水位 (実線：風下端中央 (図-3点A₁), 破線：風上端中央 (図-3点A₃)),
 (b) 表水層流速と深水層流速の数值計算結果と解析解の比較図 (長軸中心における流速 (図-3点A₂)),
 (a) 上図：水面水位, 下図：界面水位, (b) 上図：表水層流速, 下図：深水層流速,
 それぞれ, 細線：数值計算結果, 太線：解析解による結果

$$\begin{cases} h_1 = \Delta h_{12} \frac{x}{L} + \frac{\Delta h_1}{2} \sin\left(\frac{\alpha_1}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \\ \quad + \frac{\Delta h_{12}}{4} \sin\left(\frac{\beta_1}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_{12}} t\right) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{g}{4\pi L} \left\{ \Delta h_1 \alpha_1 T_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \right. \\ \quad \left. + \frac{\Delta h_{12} \alpha_1 T_{12}}{2} \cos\left(\frac{\beta_1}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_{12}} t\right) \right\} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} h_{12} = -(1-\varepsilon) \Delta h_{12} \frac{x}{\varepsilon L} + \frac{\Delta h_1}{2} \sin\left(\frac{\alpha_{12}}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \\ \quad - (1-\varepsilon) \frac{\Delta h_{12}}{2\varepsilon} \sin\left(\frac{\beta_{12}}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T_{12}} t\right) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_{12} = \frac{g}{4\pi L} \left\{ (1-\varepsilon) \Delta h_1 \alpha_1 T_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \right. \\ \quad + (1-\varepsilon) \frac{\Delta h_{12} \beta_{12} T_{12}}{2} \cos\left(\frac{\beta_{12}}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_{12}} t\right) \\ \quad \left. - (1-\varepsilon) \Delta h_{12} \alpha_{12} T_{12} \cos\left(\frac{\beta_{12}}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_{12}} t\right) \right\} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \Delta h_1 = \frac{Lu^2}{gh_1} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Delta h_{12} = \frac{Lu^2}{g(h_1 - h_{12})} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} T_1 = 2L(g h_{12})^{-1/2} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} T_{12} = 2L \left(g \frac{(h_1 - h_{12}) h_{12}}{h_1} \right)^{-1/2} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pi \end{cases} \quad (14) \quad \begin{cases} \beta_1 = 2\pi \frac{h_{12}}{h_1} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \alpha_{12} = \pi \frac{h_1}{h_{12}} \end{cases} \quad (15) \quad \begin{cases} \beta_{12} = \pi \end{cases} \quad (17)$$

図-1(a) (b)に, 水位, 流速の比較図を示す. 水位について, それぞれ実線は図-3における点A₁に対応し, 破線は点A₂に対応する. 流速については, 図-3における点A₃に対応する.

順圧水位において, 順圧水深規模の短周期のセイシュ (単にセイシュとする) と, 傾圧水面による長周期のセイシュ (内部セイシュ) の影響が混在しているのが分かる. 内部セイシュは, 深水層水深が小さくなるに連れ小さくなり, 最終的にはセイシュのみが卓越した

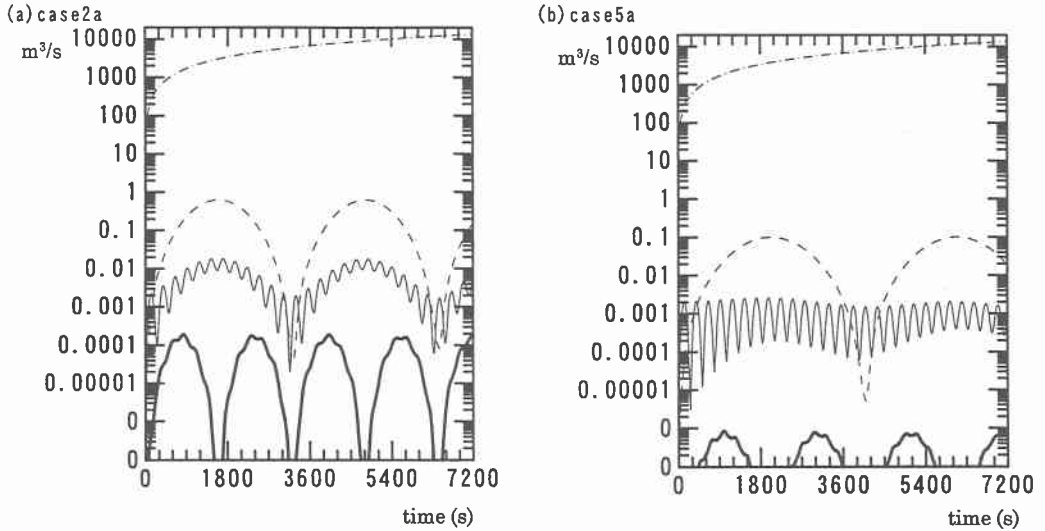


図-2(a) (b) (a)case2a, (b)case5aにおける風によるエネルギー(一点鎖線: E_w),
 順圧成分のポテンシャルエネルギー(細実線: P_b),
 傾圧成分のポテンシャルエネルギー(破線: P_{bc}),
 運動エネルギー(太実線: K_{bc})の深水層密度で除した時間変化

波のみが残る。

内部界面においては、湧昇(upwelling)を示す、風下端での界面低下、風上端での界面上昇が見られる。本計算では、表水層と深水層との間の無次元密度差を0.03としたため、内部セイシュの振幅はそれほど大きくないのが分かる。流速に関しては、表水層、深水層との間で連続の関係を満たすように、 $u_1(h_1-h_{12})=u_{12}h_{12}$ が成り立っていることが分かる。

以上、数値計算の結果、解析解の結果、両者とも非常によく一致し、連続の関係も全体で満足していることから、数値計算が十分な精度を持って計算されていることが分かる。以下、この数値計算方法を、様々な種類の問題へと適用することとする。

図-2(a) (b)には、case2a, case5aにおける風によるエネルギー(一点鎖線: E_w)、順圧成分のポテンシャルエネルギー(細実線: P_b)、傾圧成分のポテンシャルエネルギー(破線: P_{bc})、運動エネルギー(太実線: K_{bc})の深水層密度で除した時間変化を示す。深水層の水深が薄くなるにつれ、 P_{bc} の値が大きくなり、内部セイシュの影響が大きくなっているのが分かる。さらに、 K_{bc} も深水層の増大に伴う流速の増大により、大きくなっている。

なお、風によるエネルギーを計算する際には、一定の風が与えられた場合に計算される定常状態における水位差が、セイシュの周期の1/4の時間におけるものと同じことを利用し、以下のような式を導いた。

E_w :

$$E_w = \int_0^T LU_w u_*^2 dt = LU_w u_*^2 T \quad (18)$$

定常状態における水位差による P_{bc} :

$$P_{bc} = \frac{L^2 u_*^2}{4} \quad (19)$$

式(18)=式(19)より、式(20)が得られる。上述の仮定により、式(20)はセイシュの周期の1/4の時間において成り立つことから、式(20)中のエネルギーの伝播速度が式(21)で得られる。

$$U_w T = \frac{L}{4} \quad T = \frac{T_i}{4} \quad (20)$$

$$U_w = \frac{\sqrt{gh_1}}{2} \quad (21)$$

続いて、湖沼の平面形状、湖底高さが変化することによる、セイシュ、内部セイシュの影響を調べる。図-3に、平面形状、湖底高さを変化させた場合のパラメータとその概略図を示す。表-2に、計算を行ったケースの条件を示す。それぞれのケースにおいて、幅の減少の効果、水深の変化による効果、両者を考慮した場合の効果調べた。

図-4に、水位の比較図を示す。図の表記方法は図-1と同様のものであるため、参考にされたい。比較のため、一定幅、勾配ゼロにおける同様な水面水位と界面

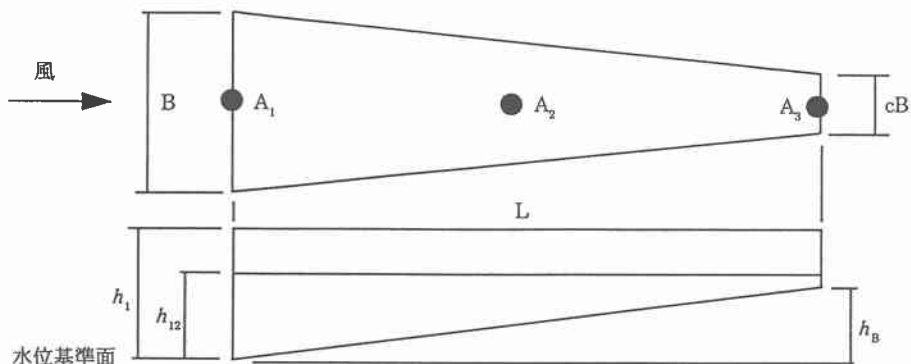
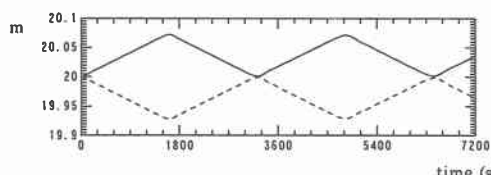
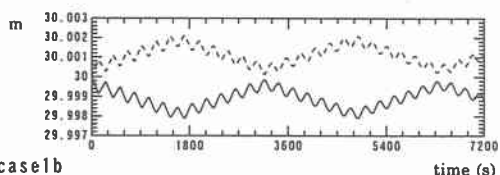
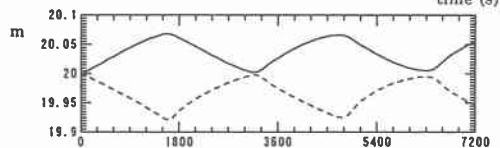
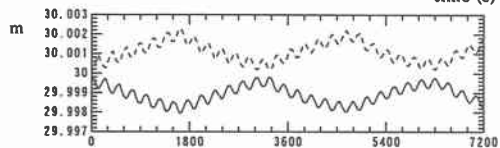


図-3 湖沼の断面，湖底高さの変化に関する説明図

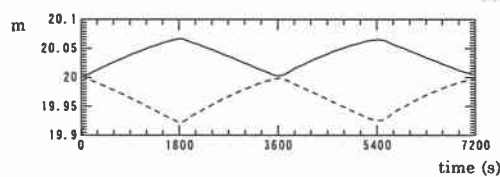
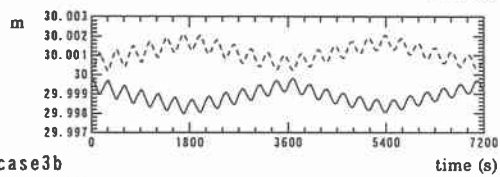
case2a



case1b



case2b



case3b

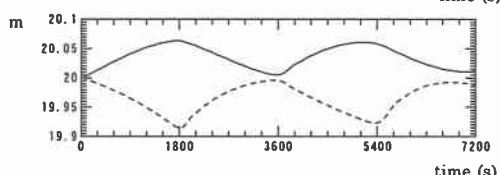
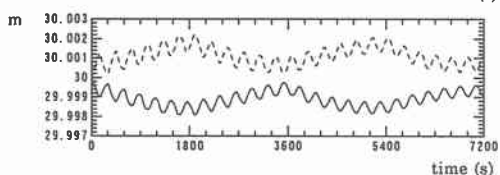


図-4 水面水位と界面水位，左図：水面水位，右図：界面水位，表記方法はを図-1参照

表-2 幅，湖底高さを変化させたときの計算条件

		備考
短軸長	B	500m 変化
長軸長	L	2250m 一定長さ
摩擦速度	u_*	0.0100m/s 一定値
	ϵ	0.0300 一定値
表水層水位	h_1+Z	30.0m 一定値
深水層水位	$h_{12}+Z$	20.0m 一定値
幅比	c	0.3 case1b
風下湖底高さ	h_B	0.0m case1b
幅比	c	0.0 case2b
風下湖底高さ	h_B	15.0m case2b

幅比	c	0.3	case3b
風下湖底高さ	h_B	15.0m	

水位の変化図も示しておく。

幅が狭まった場合において，セイシュ成分，内部セイシュ成分において，水位低下時の水位の時間変化の下方への膨らみ，水位上昇時での水位の時間変化の上方への膨らみが見られる。周期に関しては，セイシュ，内部セイシュとも，幅が減少したことにより周期が，3~4%の減少を示したが，それほど大きな影響は見られなかった。

勾配が生じた場合において，セイシュ成分の振幅は

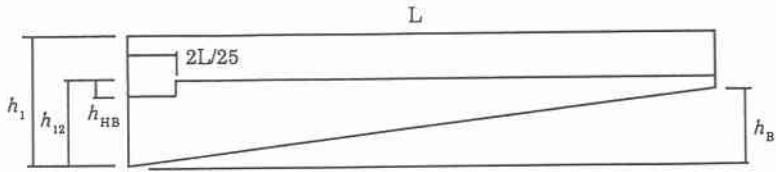


図-5 内部波の計算に用いた初期条件説明の概略図

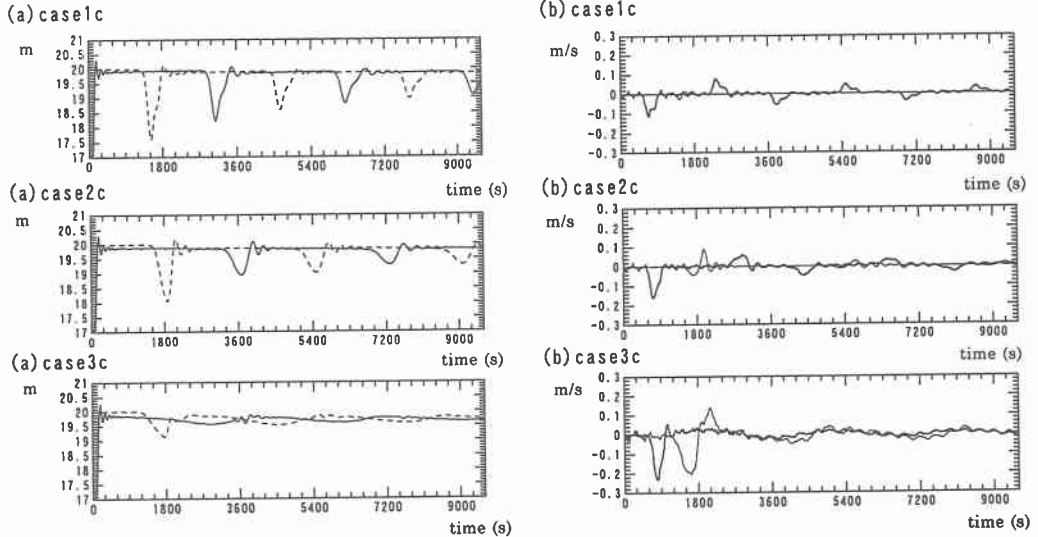


図-6 (a) 界面水位, (b) 深水層流速(太実線:水路中央, 細実線:水路右端もしくは界面と湖底の接地点), 表記方法はを図-1参照

増大するが、内部セイシュ成分の振幅はそれほど変化しないといった現象が見られた。これは、セイシュを形成する大きな要因である水面までの水深は、勾配が発生したことにより減少したが、内部セイシュに関わる表水層の水深は変化していないことに起因する。周期に関しては、勾配による影響が大きく、およそ15%強の増大が、セイシュ、内部セイシュにおいて見られた。

幅の減少、勾配が生じた場合においては、両者の影響が発生した結果である、セイシュ振幅の増大、周期の約12%の増大が見られた。但し、以上の現象は非線型な現象であるため、単純な重ね合せは出来ないことが、内部界面における水位の周期内での大きな左右非対称性に見られる。

4. 内部波

図-5(a)(b)に、内部波を発生させた際に用いた初期条件の概略図を示す。計算は、表-3に示す3ケースについて行った。なお、case3cにおける破線は、界面と湖底が接する直前におけるものを用いて表示されており、他のケースと異なるポイントでのものである。な

表-3 内部波に関する計算条件

			備考
短軸長	B	500m	一定値
長軸長	L	2250m	一定長さ
断波水深	h_{HB}	3.00m	一定値
	ε	0.0300	一定値
表水層水位	h_1+Z	30.0m	一定値
深水層水位	$h_{12}+Z$	20.0m	一定値
風下湖底高さ	h_B	0.0m	case1c
風下湖底高さ	h_B	15.0m	case2c
風下湖底高さ	h_B	25.0m	case3c

お、本計算以降摩擦抵抗を考慮している。

湖底勾配がゼロの場合、内部波が壁面に衝突し、反射しているのが分かる。その際、計算は摩擦を考慮したものであるため、徐々に減衰している。その減衰の程度の大きさは、深水層の大きな流速からも推測される。case2cも同様な結果であるが、このケースでは湖沼右端における最大流速が、勾配が生じたため大きくなっており、より大きな減衰が内部波において見られる。

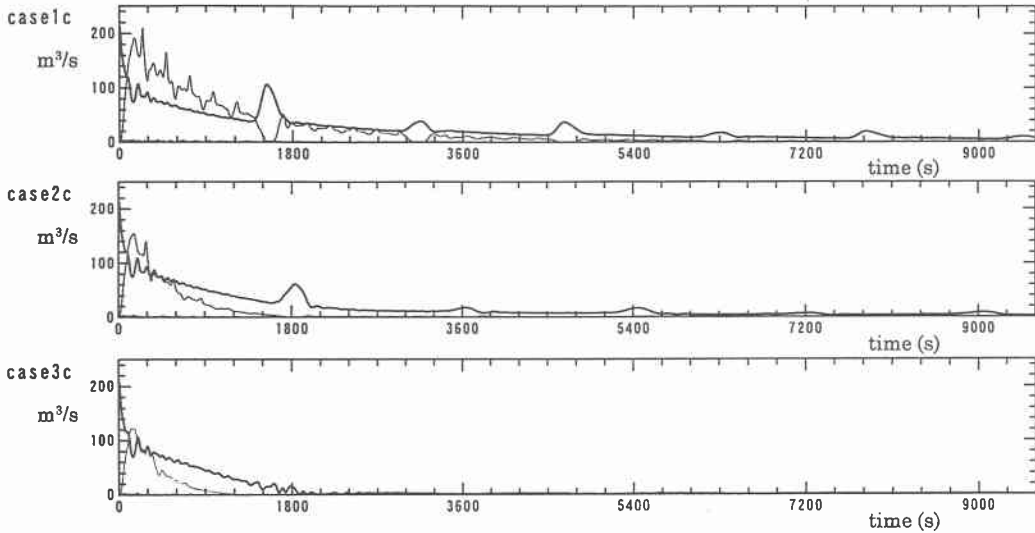


図-7 順圧成分のポテンシャルエネルギー(破線: P_b), 傾圧成分のポテンシャルエネルギー(太実線: P_{bc}), 運動エネルギー(細実線: K_{bc})の深水層密度で除した時間変化

case3cでは、界面が湖底と接していることから、初期に与えられた内部波が湖底面上で跳水を起こし(ここでは、浅水流方程式を用いているので、3次元的な構造による砕波等は再現されていない)、他のケースのように壁面で反射して、内部波としての構造を保つことが出来ていない。

図-7に、それぞれのエネルギーの時間推移を示す。順圧のエネルギーは他の成分に比べかなり小さく、グラフ上では確認できない。case1cでは、傾圧のエネルギーが緩やかな減衰を示している。case3cでは、内部波の消滅、大きな深水層流速により大きなエネルギーの減衰が見られる。

5. まとめ

基本的な研究ではあるが、二層流モデルを用いて、セイシュ、内部セイシュ、内部波に関する検討を加えた。今後、実現象における内部波の砕波のモデル化(3次元LESモデル等による)、成層場における風による混合、拡散などのモデル化を行い、実験、観測による検証を行っていきたい。

参考文献

- 1) Thorpe, S. A. : On standing internal gravity waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, vol.32, part3, pp.489-528, 1968.
- 2) Thorpe, S. A. : Near-resonant forcing in a shallow two-layer fluid: a model for the internal surge in Loch Ness?, *J. Fluid Mech.*, vol.63, part3, pp.509-527, 1974.

- 3) Koop, C. G. and G. Butler : An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, vol.112, pp.225-251, 1981.
- 4) Wood, I. R. and J. E. SIMPSON : Jumps in layered miscible fluids, *J. Fluid Mech.*, vol.140, pp.329-342, 1984.
- 5) Kao, T. W., Fuh-Shing PAN and D. Renouard : Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope, *J. Fluid Mech.*, vol.159, pp.19-53, 1985.
- 6) Stevens G. and J. Imberger : Initial response of a stratified lake to a surface shear stress, *J. Fluid Mech.*, vol.312, pp.39-66, 1996.
- 7) Thorpe S. A. and A. P. Haines : On the reflection of a train of finite-amplitude internal waves from a uniform slope, *J. Fluid Mech.*, vol.178, pp.279-302, 1987.
- 8) Thorpe S. A. : Statically unstable layers produced by overturning internal gravity waves, *J. Fluid Mech.*, vol.260, pp.333-350, 1994.
- 9) Ivey, G. N. and R. I. Nokes : Vertical mixing due to the breaking of critical internal waves on sloping boundaries, *J. Fluid Mech.*, vol.204, pp.479-500, 1989.
- 10) 中山恵介, 堀川康志, 三上卓哉: 射流場におかれた円柱周辺の流れの解析, *水工学論文集*, 第43巻, 投降中.
- 11) 中山恵介, 佐藤圭洋, 堀川康志: CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発, *水工学論文集*, 第42巻, pp.1159-1164, 1998.
- 12) Imberger, J. and J. C. Patterson : Physical limnology, *Adv. Appl. Mech.*, vol.27, pp.303-475.