

## II-3 ウェーブレット関数による時系列解析

北海道大学工学部                      ○学生員    星野 智紀  
 北海道大学大学院                  フェロー会員    藤田 睦博  
 日産建設(株)札幌支店              正会員        熊谷 進

### 1. はじめに

時系列解析においてフーリエスペクトルが多用されている。しかし時間で積分して周波数領域に変換して議論するために時間領域の情報が失われる欠点がある。フーリエ解析の欠点を補うために窓関数を用いるフーリエ変換や短時間フーリエ変換の手法が提案されているが、時間情報を増やそうとすると周波数情報が失われ、周波数情報を増やそうとすると時間情報が失われる欠点が指摘されている。ウェーブレット関数は波形を高精度で時間領域と周波数領域にまたがって解析することが可能である。周知のようにウェーブレット関数は連続系ウェーブレット変換と離散系ウェーブレット変換に分類できる。連続系ウェーブレット変換は基底関数の直交性が成立しておらず、解析結果は作用した基底関数に依存している。解析の対象とする時系列によって各種の基底関数を用いた解析結果が報告されている。<sup>1),2)</sup>一方離散系ウェーブレット変換は基底関数の直交性が常に成立している。したがってフーリエスペクトルと同様にウェーブレットスペクトルにパワーの概念を導入できる。

本研究は、先ず標本関数を用いて連続系ウェーブレット解析と離散系ウェーブレットの特徴を述べ、定山溪ダムの水位変動を解析した結果を述べる。

### 2. ウェーブレット変換<sup>3),4)</sup>

関数  $f(t)$  の基底関数(マザーウェーブレット)  $\psi(x)$  によるウェーブレット変換、および逆変換は式(1)、(2)で与えられる。

$$(W_{\psi} f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) \dots (1) \quad f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \iint_{\mathbb{R}^2} (W_{\psi} f)(b, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \dots (2)$$

ここで、(2)式の右辺が定義できるためには、以下のアドミッシブル条件 ( $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ ) を満たさなければならない。この式は  $\psi(x)$  が振動的である事を示している。また、ウェーブレット変換は連続値系ウェーブレット変換と離散値系ウェーブレット変換に大別される。離散系ウェーブレット変換、および逆変換は(1)、(2)式の  $(b, 1/a)$  を  $(2^j k, 2^{-j})$  とおくことにより、以下の式(3)、(4)であたえられる。

$$(W_{\psi} f)(2^{-j} k, 2^{-j}) = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j t - k) f(t) dx = d_k^{(j)} \dots (3) \quad f(t) = \sum_j \sum_k d_k^{(j)} \psi(2^j t - k) \dots (4)$$

### 3. 標本関数を用いたウェーブレット解析

標本関数としては、一般の時系列に現れると思われる特性を考慮して以下に示す4種類の関数を設定した。(図-1は式(5)~(8)を図示したものである)

(1) 振幅一定周波数の急変  $f_1(t) = \begin{cases} 2\cos 5t & (0 < t \leq 10) \\ 2\cos 15t & (10 \leq t < 20) \end{cases} \dots (5)$

(2) 振幅一定周波数の遷移的变化  $f_2(t) = 2\cos(4.5t + 8\cos(0.4t)) \dots (6)$

(3) 余弦波に攪乱成分が入った例  $f_3(t) = \left(\frac{3.5(t-10)}{0.01}\right) e^{-\frac{(t-10)^2}{0.02}} + 20\cos(15t) \dots (7)$

(4) 振幅の周期的変動、周波数の遷移的增加  $f_4(t) = \left(2.0 + \cos\left(\frac{t-1}{1.5}\right)\right) \cos\left(\frac{t^2}{2.0}\right) \dots (8)$

なお、以下に示す基底関数を用いた。式(9)、(10)は連続ウェーブレットを示し、(9)は実関数ウェーブレット、(10)は複素ウェーブレットである。また、式(11)は離散系ウェーブレットを示す。(Harrの基底関数)

$$\psi_1(x) = e^{-\frac{x^2}{8^2}} \cos x \dots \dots \dots (9)$$

$$\psi_2(x) = e^{-\frac{x^2}{8^2}} e^{ix} \dots \dots \dots (10)$$

$i$  : 虚数単位

$$\psi_3(x) = \begin{cases} 1(0 < x \leq 1/2) \\ -1(1/2 \leq x < 1) \\ 0(\text{otherwise}) \end{cases} \dots \dots \dots (11)$$

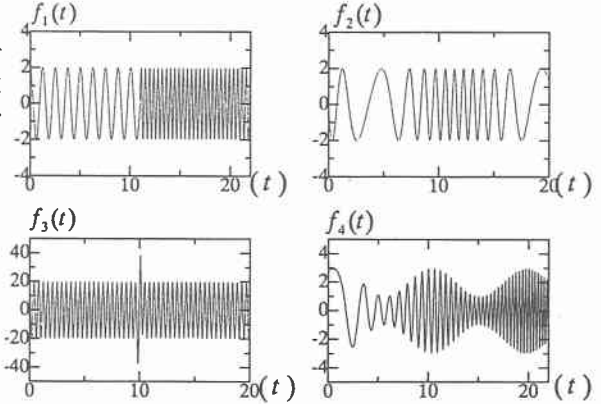


図-1 標本関数

4つの標本関数のウェーブレット変換の結果を以下に示す。ウェーブレットであらわした信号の表示の値は、それぞれの時間による周波数の強度を示している。なお横軸が時間、縦軸は連続系では周波数、離散系では振動数の対数を示しており、波立ちができていところが卓越周期を示す。

(1) 周波数の急変

(A)  $\psi_1(x)$ を使用

(B)  $\psi_2(x)$ を使用

(C)  $\psi_3(x)$ を使用

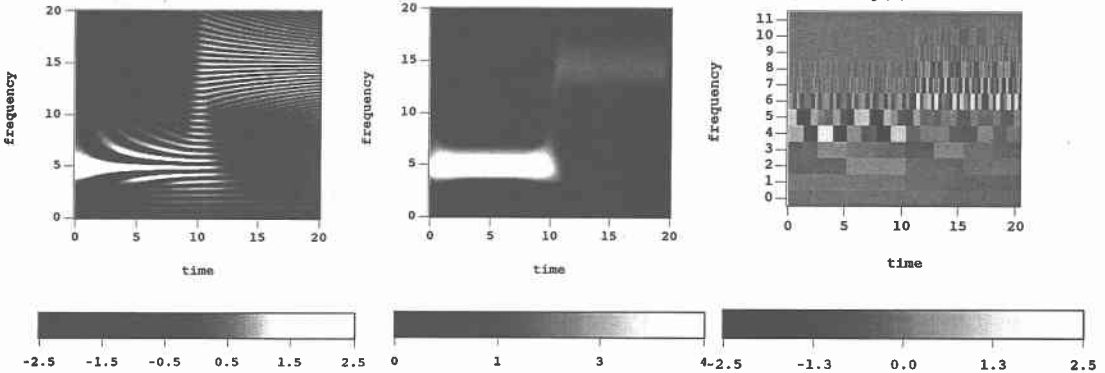


図-2 周波数急変の場合

図2(A),(B)は共に連続系ウェーブレットで得られたものであるが、両者を比較すると(A)の方が波立ちが激しいことが分かる。これは、使用した基底関数が全て実数の値を取るウェーブレットであり、正負の値を繰り返して取るためである。反対に(B)の基底関数は複素数で定義されており、表示の値は絶対値を取っているため全て正の値になる。このため、なめらかな表示が可能なのである。(C)は離散系ウェーブレットによって表示されたものである。いずれの場合においても  $t = 10$  を境に周波数が5~15に変化している様子が見られる。

(2) 振幅一定・周波数の遷移的变化

図-3では、いずれの場合も周波数の時間的な移り変わりを示しているのが分かる。ここで、(C)の縦軸は振動数の対数を示しているわけだが、(A),(B)の周波数と比べてみる。いま、(C)の縦軸の最小値と最大値を見ると、 $t = 4 \sim 5$  で4、 $t = 12$  で7となっている。この縦軸の4と7は振動数で表すと4~8、32~64(回/秒)に対応しており、それぞれ周波数に変換すると0.63~1.27、5.1~10.2に対応し、(A),(B)と一致している。

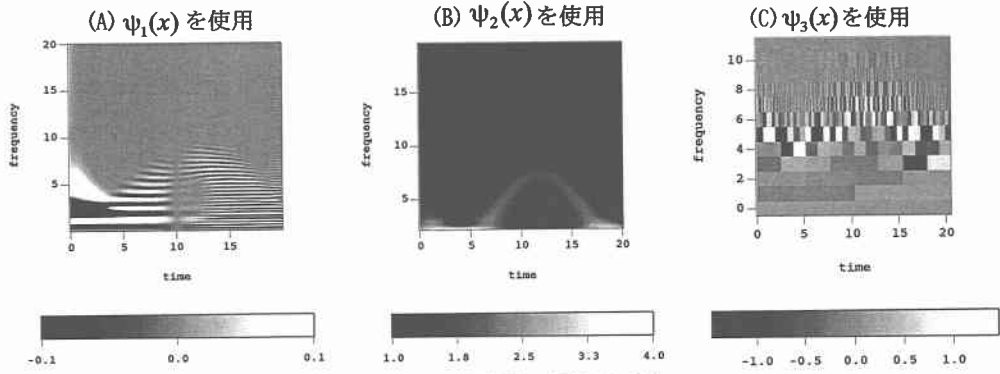
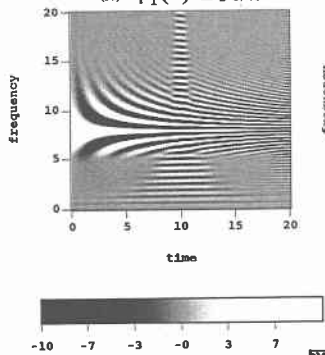
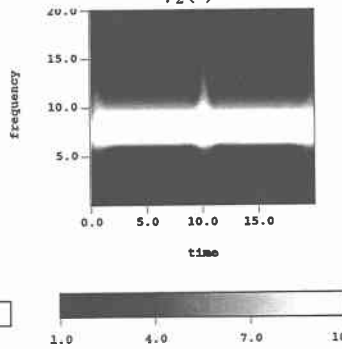


図-3 周波数の遷移的变化

(3) 余弦波に攪乱成分が入った例  
(A)  $\psi_1(x)$  を使用



(B)  $\psi_2(x)$  を使用



(C)  $\psi_3(x)$  を使用

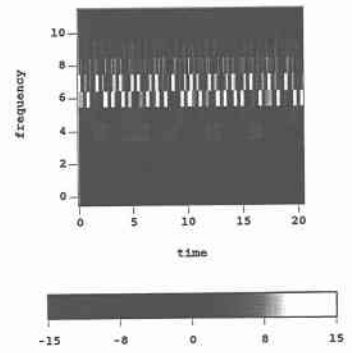
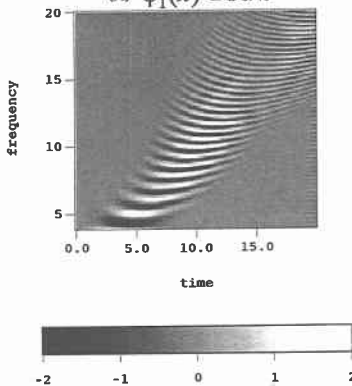


図-4 余弦波の中に攪乱成分が入った例

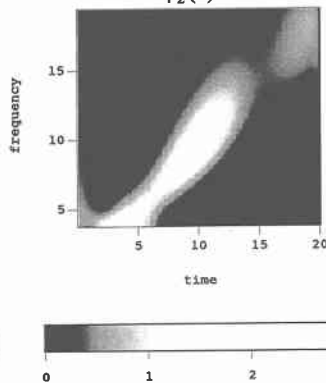
時刻  $t=10$  に注目したい。攪乱成分の影響により、連続系のウェーブレットでは上の方向に円錐の頂点が伸びていったような信号になっており、上にのびるにしたがって収束している。時系列解析において、振動成分が周期的な成分なのか、あるいは攪乱成分なのかを見極めるのは重要なことであるが、(2)と(3)を比較すると、両者のウェーブレット信号が全く異なる挙動をしているのがわかる。離散系ウェーブレットではノイズを見つけるのはむずかしいが、時刻  $t=10$  の地点に注目すると縦軸で8のところ卓越しているのが分かる。

(4) 振幅の周期的変化・周波数の遷移的增加

(A)  $\psi_1(x)$  を使用



(B)  $\psi_2(x)$  を使用



(C)  $\psi_3(x)$  を使用

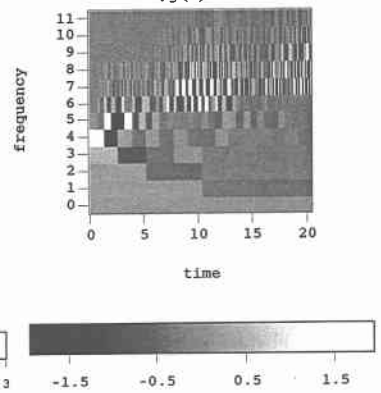


図-5 振幅の周期的変動、周波数の遷移的增加

図-4 では時間の経過と共に周波数が増えていく様子をよく表しているのが分かる。ここまで4つの標本関数について、連続系ウェーブレット変換、離散系ウェーブレット変換の両面からウェーブレット信号の表示をおこなってきたが、いずれの場合においても元の系列の特性を時間領域、周波数領域の両面からとらえる事ができた。

#### 4. 定山溪ダムの水位変動解析

図-6 は解析の対象とした定山溪ダム貯水池の概要を示す。水位データとしては図-6のNo.1、No.3、No.6およびダム堤体内の測水塔で観測した4種類のデータを用いた。水位の観測は1997年10月22日の0時から24時までの24時間の水位変動の観測値である。図-7に4地点における水位の観測値を示す。いずれの地点も傾向成分を持っており直線式を仮定し、傾向成分からの偏差を解析の対象とした。



図-6 定山溪ダム平面図

離散系ウェーブレット変換では扱うデータの個数は2のべき乗でなければならないので今回は  $2^{13}$  (8192)個のデータを用いて解析を行った。時間に直すと午前0時から22時45分20秒までのデータを用いたことになる。4地点の水位変動をウェーブレット変換をした結果を図-8に示す。図-8の左側の図はスペクトル密度を示しておく。

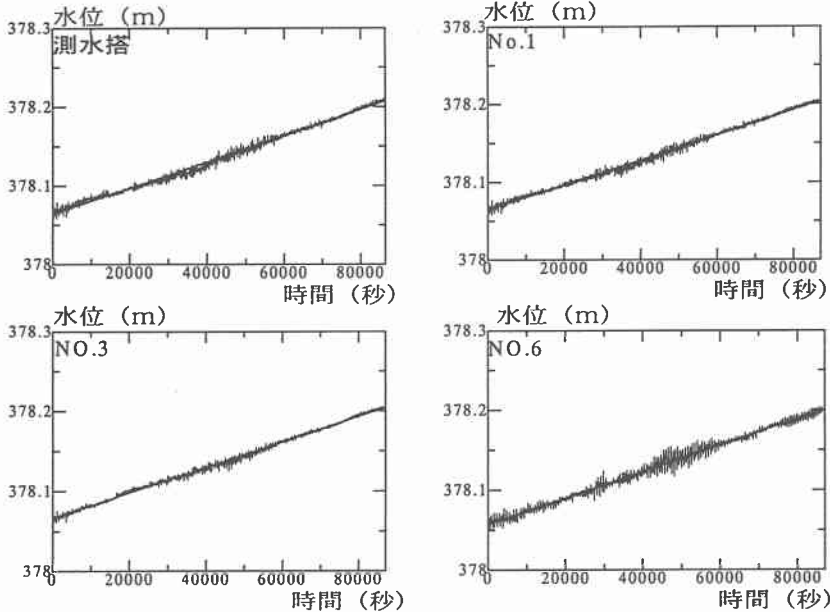


図-7 4地点における水位観測値

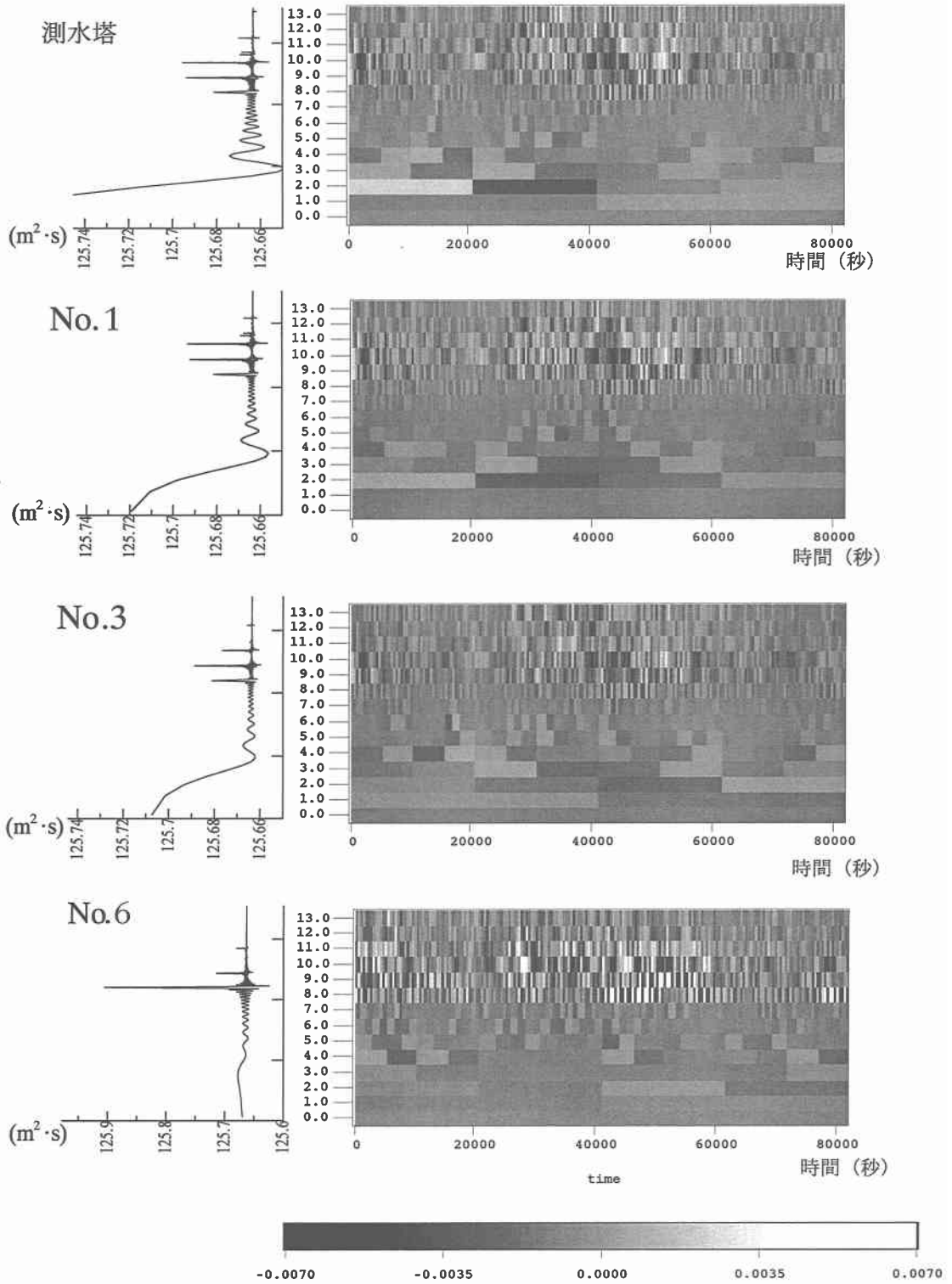


図-8 各観測点におけるスペクトル密度とウェーブレット変換

各観測地点とも、時刻  $t = 30000 \sim 60000$  でウェーブレット信号の縦軸で 8 から 13 (8 ~ 13octave, 以下、縦軸の単位は octave とする。) における波立ちが激しいのがわかる。また、それぞれのスペクトル密度とウェーブレット信号の卓越周期を比べるとよく一致している。また、No. 6 の観測点のウェーブレット信号は特に 8 ~ 10octave の間で他の観測点の信号の値と比べて大きい。その他には、測水塔、No. 1 の  $t = 0 \sim 40000$  において 2octave の振動が信号として現れている。

## 5. 考察

まず、測水塔、No. 1 の 2octave の波についてだが、これは周期に変換すると 40960 秒 (11.4 時間) という非常に長い周期である。これは当日午前 0 時から午前 9 時にダム放水が行われており、堤体に近い計測点でしか検出されないことから考えると、放水による水面の変化が振動として検出されたものだと考えられる。時刻  $t = 30000 \sim 60000$  秒の区間での 13, 12, 11octave の波は、周期に換算すると 20 秒 ~ 80 秒である。図-9 を見ると当日、 $t = 30000 \sim 60000$  秒の区間で強い風が吹いており、この信号は風波による影響であると思われる。また、図-10 を見ると 30000 (秒) から約 25000 秒の間、強い風が長軸方向に向けて吹いていたのが分かる。ウェーブレット信号と比較すると、30000 秒を越えた時刻から 8 ~ 10octave における信号が卓越しているのが分かる。ウェーブレット信号の縦軸の単位を、周期 (秒) に変換すると 8octave で 320 ~ 640 秒、9octave で 160 ~ 320 秒、10octave で 80 ~ 160 秒である。石田ら<sup>(4)</sup>は定山溪ダム貯水池において 210 秒、80 秒といったセイシュの存在を確認している。これらのセイシュ周期と卓越した octave の範囲は一致することからこの結果はセイシュを検出したものといえる。特に 8 ~ 10octave における No. 6 のウェーブレット信号は顕著になっているが、これは No. 6 における水深が浅いためにセイシュによる水面の変動が大きくなったものだと予想できる。次にセイシュの周期の移り変わりに注目すると、30000 秒から 60000 秒まで 10octave (周期 80 ~ 160 秒) の波が存在したと予想できる。また、8octave、9octave の波 (周期 160 ~ 320 秒、320 ~ 640 秒の波) については、40000 秒を超えた所でまず 8octave の波が生じ、40000 秒後半から 9octave の波に移り、その後再び 50000 秒の後半に 8octave の波に戻っている。セイシュ周期の存在は図-8 に示すようにスペクトル解析の結果からも確認できるが、時間領域の情報が失われてしまうためにどの時間帯にどの周期のセイシュが発生しているかを知ることができない。しかし、ウェーブレット解析を用いることにより時間領域の情報を失うことなく卓越周期成分を知ることが可能である。

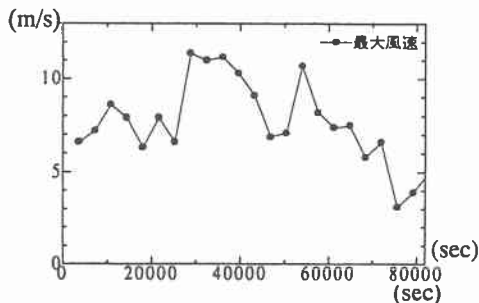


図-9 97年 10/22 最大風速

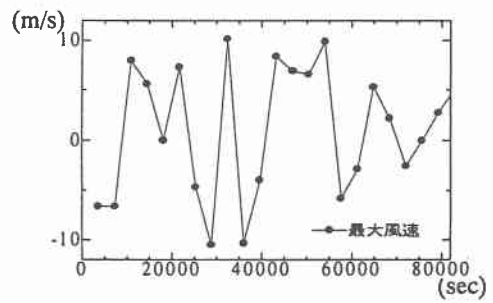


図-10 97年 10/22 最大風速(長軸方向)

## 参考文献

- (1) K.-M. Lau and Hengyi Weng: climate signal detection using wavelet transform-How to make a time series sing-: Bulletin of American meteorological society Vol. 76, No. 12, December 1995
- (2) D. Jordan and R. W. Miksad. E. J. Powers: Implementation of the continuous wavelet transform for digital time series analysis: Rev. Sci. Instrum. 68(3), March 1997
- (3) 榎原進: ウェーブレットビギナーズガイド: 東京電機大学出版局
- (4) 芦野隆一、山本鎮男: ウェーブレット解析 “誕生・発展・応用”: 共立出版
- (5) 石田享平、長谷川和義、鈴木洋之: 多点同時水位計測による貯水池の水面変動解析: 水工学論文集第 41 巻 pp1017-1022 1997