

II - 1

降雨流出系の周波数領域における応答特性の検討

北見工業大学大学院 ○学生員 木口 満  
 北見工業大学工学部 正会員 早川 博  
 北見工業大学工学部 正会員 内島邦秀

1. はじめに

降雨-流出の関係は、図-1 に示すように降雨を入力とし、流域で変換された流量を出力とする非線形応答システムと考えられる。一般に、システムに入力を加えるとある時間までは複雑な応答を示すが、十分に時間が経過すると定常状態に達する。応答が定常状態に達するまでの過渡的な経過を過渡応答、定常状態での応答を定常応答といい、降雨流出系では、入力である降雨の規模・条件（継続時間、降雨強度や降雨波形等）に応じて、過渡応答、あるいは定常応答が流域システムの応答特性を代表することになる。

システムの過渡応答は一般に時間領域で解析され、線形システムにインパルス入力、ステップ入力を加えたときの応答特性について調べられている。降雨流出系では流域にインパルス応答の降雨を入力したときのシステム関数（伝達関数）が瞬間単位関に相当し、またステップ入力を加えたときのステップ応答から単位関を求めることができる。実流域では降雨の規模・条件によって、流出量が定常状態に達する前に降雨が終了してしまい、この場合は過渡状態の応答特性が重要になってくる。一方、線形システムに正弦波状入力を加え、十分に時間が経過した後の定常応答が入力によってどのように変化するかを周波数領域で考えるのが周波数応答法である。藤田<sup>1)</sup>、嵯峨<sup>2)</sup>は降雨流出系にこの周波数応答法を適用し、システム関数の導出、流出の遅れであるむだ時間の導入や流出成分の分離を行っている。また、著者ら<sup>3)</sup>、田中<sup>4)</sup>は図-1 に示す各要素システム毎の周波数応答特性（ゲインや位相差など）を検討し、全流域システムのゲインが各要素のゲインの積で表現できることを示している。

本研究は本来、システムの定常応答特性を調べるための周波数応答法を、降雨流出系のハイドログラフの立ち上がり部や減水部の過渡応答範囲まで拡張し、周波数領域における応答特性を検討するものである。

2. 降雨流出系の周波数応答特性

流出モデルには流域の諸特性を空間的に集約する集中型流出モデルと空間的な不均衡を考慮する分布型流出モデルに大別される。集中型モデルは図-1 の流域を1個のシステムに集約しているため、入力である降雨の空間分布などの影響を反映しにくい。田中<sup>4)</sup>は図-1 の実降雨をサンプリングする際の離散化によるゲイン特性を明らかにし、流出量がこの離散化と流域モデルの2つの直列低域フィルターの出力になることを示した。一方、分布型モデルは空間的に分布している流域の諸特性や降雨特性を反映できる構造になって

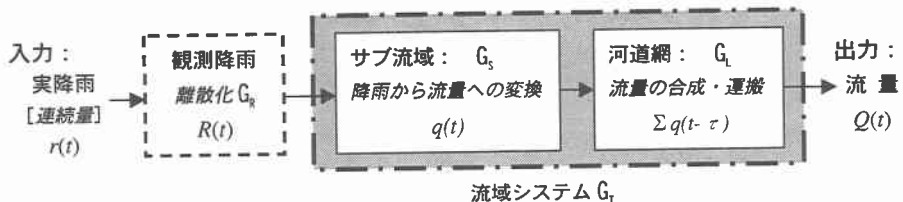


図-1 降雨流出系の応答関係

Estimation of Hydrologic Response for Rainfall Runoff System in Frequency Domain  
 by Michiru KIGUCHI, Hiroshi HAYAKAWA and Kunihide UCHIJIMA

おり、図-1 に示すようにサブ流域での変換機構や河道網による運搬・合成機構などの個々のシステムを連結したシステムである。著者らは各要素システムを低域フィルターと見なし、サブ流域に星の貯留関数法<sup>2)</sup>を用い、また、河道網における流出量の運搬・合成機構に流出量が一定速度で伝播し、線形重ね合せモデルを適用した場合の周波数のゲイン特性を導いた<sup>3)</sup>。結果のみを再記すると、式(1)、(2)が貯留関数モデルのゲイン特性を示し、式(3)が全流域のゲイン特性 $G_T$ で、各サブ流域のゲイン $G_i$ と位相遅れ $\phi_i$ と河道による流出の遅れ $\tau_i = R_i/v$ からなっていることがわかる。ここで、 $\omega$ は角周波数、 $A_i$ はサブ流域面積、 $A_L$ が総流域面積、 $R_i$ がサブ流域から河道末端までの流路長、 $v$ が伝播速度である。また、式(3)において伝播速度 $v$ を無限大にすると、式(4)は河道による流出の遅れがない場合のゲイン $G_S$ になり、一方、式(3)のサブ流域のゲイン( $G_i=1$ )と位相遅れ( $\phi_i=0$ )を無視すると、式(5)は河道網の運搬・合成によるゲイン特性 $G_L$ となる。なお、この式は前報<sup>3)</sup>の表記を再整理したものである。河道による流出の遅れは、流出波形を変形することなく河道を流下することを仮定しているので、嵯峨<sup>2)</sup>が導入したむだ時間 $L$ (ゲインはそのまま $L$ だけ出力が遅れる)を導入したことになる。河道網によるゲイン低下の要因は、式(5)に示すように流出量波形が遅れ時間 $\tau_i$ だけずれて合成されることによる。

分布型流出モデルのゲイン特性は、式(3)に示したように各サブ流域のゲインの和で表現される。すなわち、1個のサブ流域からの河道末端での流出機構はサブ流域と河道の直列低域フィルターとなるが、河道網システムが各サブ流域の直列フィルターを並列結合するシステムであることを示している。また、図-1 のように流域システムをサブ流域と河道網に集約すると、全体のゲイン $G_T$ は近似的にサブ流域のゲイン $G_S$ と河道網によるゲイン $G_L$ の積で表されることがしめされた<sup>3)</sup>。

以上で述べた周波数応答特性は、図-2 のように正弦波形の降雨波形が継続して与えられたときに、流出量が十分に定常状態に達した範囲における流出量の振幅、位相との比較から得られたものである。一方、実降雨は図-3 のような三角形波形に不規則変動が付加されたような波形が多く、流出量も定常なピーク値を持たない三角形のハイドログラフが多く観測されている。本研究ではこのような実降雨に近い三角形降雨波形に対する流出量の過渡的な状態に周波数応答法を適用し、得られたゲイン特性から過渡応答に対する周波数応答法を検討する。

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1 - P_2 K_2 \tau^{n-1} \omega^2)^2 + (P_1 K_1 \tau^{n-1} \omega)^2}} \quad (1)$$

$$\phi = -\frac{P_1 K_1 \tau^{n-1} \omega}{1 - P_2 K_2 \tau^{n-1} \omega^2} \quad (2)$$

$$G_T = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} G_i \cos(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} G_i \sin(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}) \right)^2} \quad (3)$$

$$G_S = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} G_i \cos \phi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} G_i \sin \phi_i \right)^2} \quad (4)$$

$$G_L = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} \cos(\omega \frac{R_i}{v}) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_L} \sin(\omega \frac{R_i}{v}) \right)^2} \quad (5)$$

【マグニチュード4 平均降雨強度10(mm) 降雨振幅2.0(mm)】

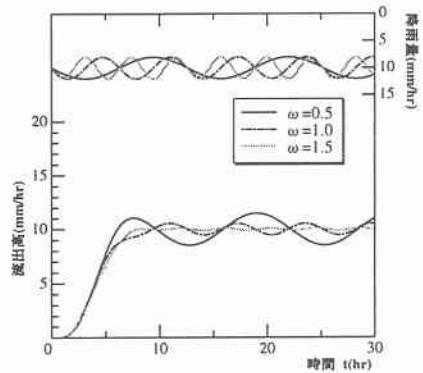


図-2 正弦波を付加した一様降雨によるハイドログラフ

【マグニチュード4 降雨時間(t1=10(hr) t2=20(hr) 降雨振幅2.0(mm)】

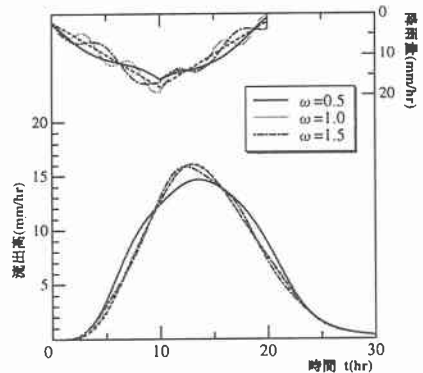


図-3 正弦波を付加した三角形降雨によるハイドログラフ

### 3. 過渡応答に対する周波数応答法の適用

図-3 に示したように三角形降雨波形による流出量は定常な状態がなく、過渡的な状態で流出量が増減している。流域システムの中ではサブ流域だけがこの影響を受けることになる。本研究ではこの状態での周波数応答特性を調べるために、図-4 の三角形降雨波形に正弦波形（振幅 2(mm/hr)）を付加した入力をサブ流域に与える。流出量は図-5 の破線の周期変動したハイドログラフが得られ、また、三角形波形のみを入力して得られたハイドログラフが実線であり、両者の差が降雨の変動成分による流出量成分である。流出量の変動は徐々に振幅を大きくし、減水期では小さくなる傾向が見られる。ここでは正負の振幅の最大値の平均を流出量の振幅と定義し、降雨の変動成分の振幅の比からゲインを求めた。

一方、式(1)から定常状態でのゲインを求めることができるが、三角形降雨波形の場合は式中のパラメータ  $K_2$  と  $P_2$  が降雨強度のみならず降雨波形の形状にも影響を受けるため、式(6)~(10)となる<sup>9</sup>。

$$K_1 = 2.823(N/\sqrt{s})^{0.6} A^{0.24} \quad (6)$$

$$K_2 = 0.2835K_1^2 \bar{r}^{0.2-2P_2} \quad (7)$$

$$P_1 = 0.6 \quad (8)$$

$$k_2 = a_1 \exp\{a_2(t_1/t_2)\} (5/3) \sum_{i=1}^4 b_i (t_1/t_2)^{i-1} \quad (9)$$

$$P_2 = c_1 \exp\{c_2(t_1/t_2)\} (5/3) \sum_{i=1}^4 d_i (t_1/t_2)^{i-1} \quad (10)$$

ここで、 $a_1 = 0.0683, a_2 = 0.3214, b_1 = -0.1137$   
 $b_2 = 0.7546, b_3 = 1.3822, b_4 = -2.0452$   
 $c_1 = 1.3536, c_2 = -0.4673, d_1 = -1.3484$   
 $d_2 = -1.5574, d_3 = 2.7270, d_4 = -1.9907$

ここに、 $f_c (= N/\sqrt{s})$  : 流域ファクター、  
 $N$  : 等価粗度係数、 $s$  : 斜面勾配、 $\bar{r}$  : 平均降雨強度、 $t_1$  : 降雨のピーク時刻、 $t_2$  : 降雨の継続時間である。

図-6 は三角形降雨波形の修正したパラメータを式(1)に代入して求めたゲインと、流出計算から求めたゲインとを比較した図で、ここでは平均降雨強度が  $\bar{r}=3, 5, 10, 20$  (mm/hr) でピークが中央に位置する三角形波形について降雨強度の違い、

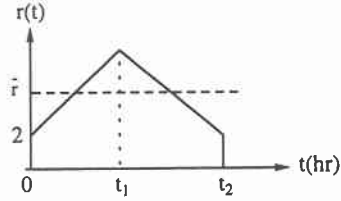


図-4 計算に与えた三角形降雨波形

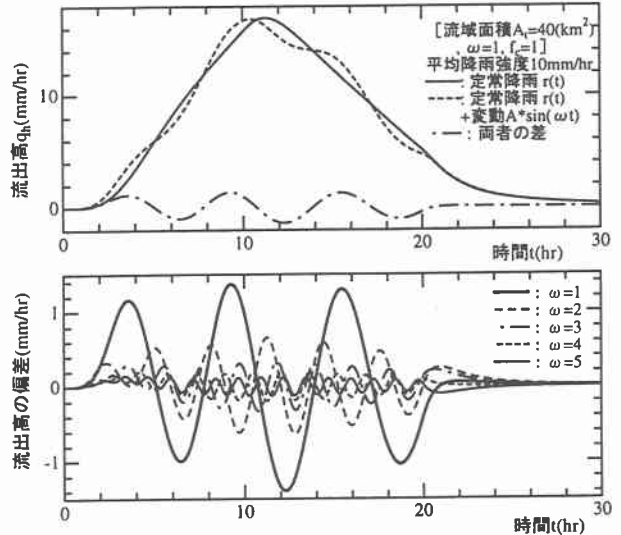


図-5 三角形降雨( $\bar{r}$  + 正弦波)によるハイドログラフと流出量の偏差

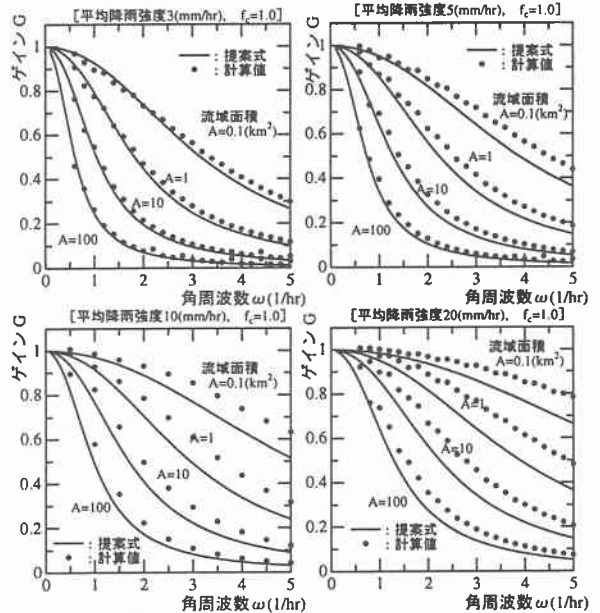


図-6 三角形降雨波形によるゲインと定常応答(式(1))との比較

流域面積の大小による比較をしている。降雨強度が弱い場合、両者はほぼ一致しているが、強度が強くなるにつれて式(1)の方が小さくなり、その差も大きくなる傾向にある。この要因として、三角形波形の場合に得られたゲインは、ハイドログラフのピーク値付近の流出量の振幅から求めたもので、このときの流出量に対する降雨強度は平均降雨強度 $\bar{F}$ より大きいと考えられる。したがって、三角形降雨の場合、式(1)に与える $\bar{F}$ を大きくする必要がありそうである。また、流域面積の大小でみると、面積が小さくなるにつれて高周波数領域での両者の差が大きくなっている。

次に、降雨波形の形状の違い、すなわち、降雨の継続時間 $t_2$ に対するピーク時刻 $t_1$ の位置関係による影響を検証する。図-7は $t_2=20$ (hr)の降雨について、 $t_1$ を2~18(hr)までを4(hr)間隔で変化させた場合の比較結果である。降雨のピークが $t_1=2$ (hr)と前半にあって後は徐々に減少する降雨の方が、徐々に降雨が増加する $t_1=18$ (hr)の場合より式(1)との対応は良い。ゲインは、 $t_1=18$ (hr)の場合の方が高周波数領域における低下が少なく、ハイドログラフの上昇期の方が降雨の変動の影響を受けることになる。実際のハイドログラフも減水期に比べて上昇期に流量が変動するハイドログラフを目にすることが多い。

図-8は、降雨継続時間 $t_2$ の大小がゲイン特性に与える影響を見ている。ある流域で流量が定常状態に達する時間は、少なくとも斜面上の流れが斜面末端に到達する時間以上になると考えられ、流域の規模に応じて定常に達する時間が異なる。いま、流域面積が $40(\text{km}^2)$ の場合の斜面到達時間をマンシングの抵抗則を仮定すると、この計算条件では約4~5時間となり、定常になる時間はこの数倍の時間を要すると考えられる。したがって、 $t_1=5$ (hr)以下の降雨条件は定常状態に達する前に降雨のピークを迎えると思われる。この到達時間前に降雨のピークを迎える $t_1=3$ (hr)、 $t_2=6$ (hr)の条件では、角周波数 $\omega=1.8$ (1/hr)付近でゲインが急激に低下した後、一旦回復するゲインの動きがみられる。この挙動が過渡状態のゲイン特性の特徴と考えられ、次に示す流域全体のゲイン特性のところで再度議論する。

最後に、実流域を想定し、マグニチュード $M$ の河道網からなる仮想的な流域の過渡・定常応答特性について考える。この仮想流域のゲイン特性は、図-9に示す各サブ流域の地形量(流域面積と河道長)にガンマ分布を与え、河道網構造として全ての河道網パターン $C(M, j)$ の期待値である $C(M, j)$ の河道網パターンを用いて流出量の確率変動量

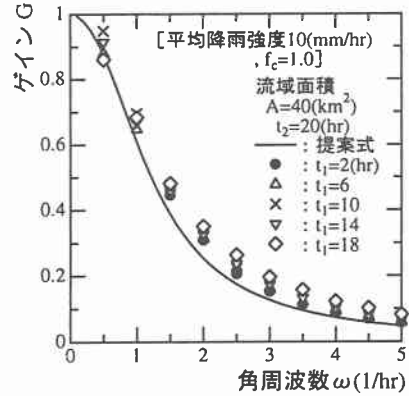


図-7 降雨波形の違いによる影響

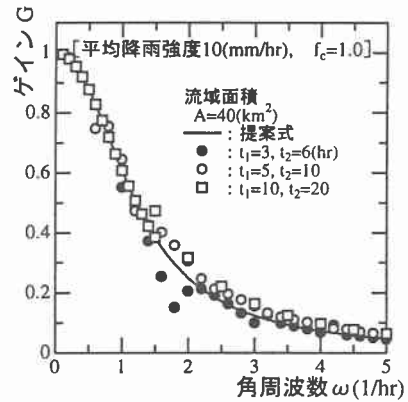


図-8 降雨継続時間の影響

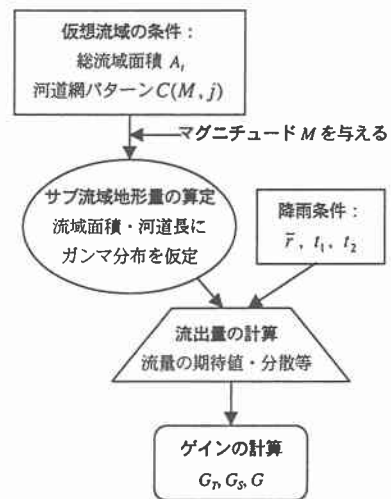


図-9 計算の流れ図

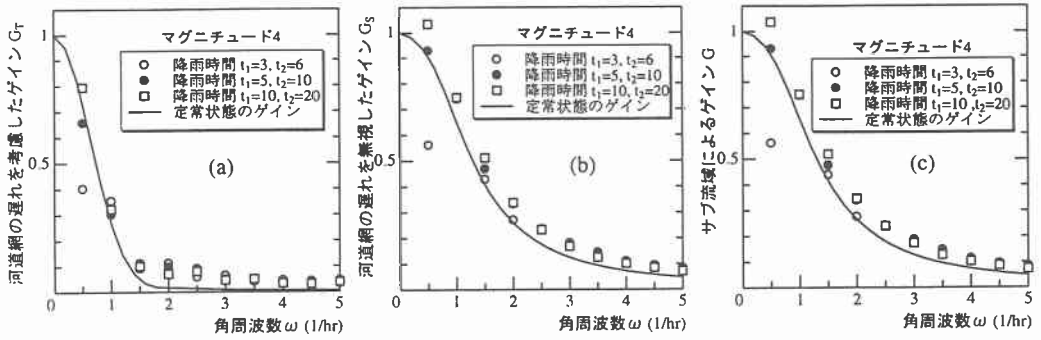


図-10 仮想流域(M=4)のゲイン特性

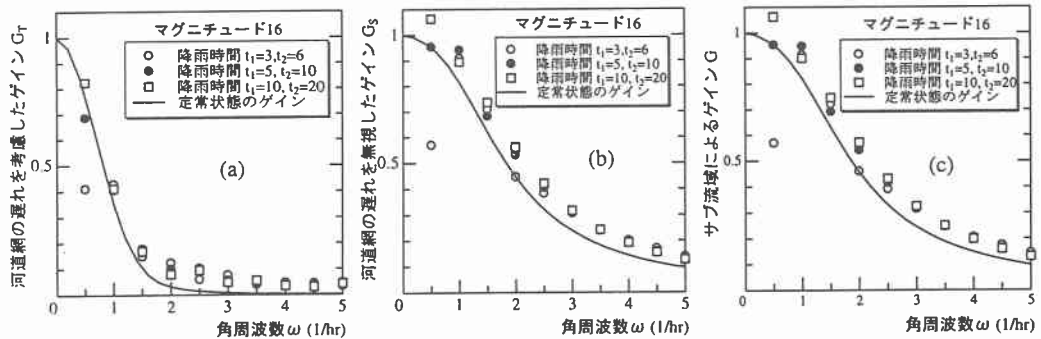


図-11 仮想流域(M=16)のゲイン特性

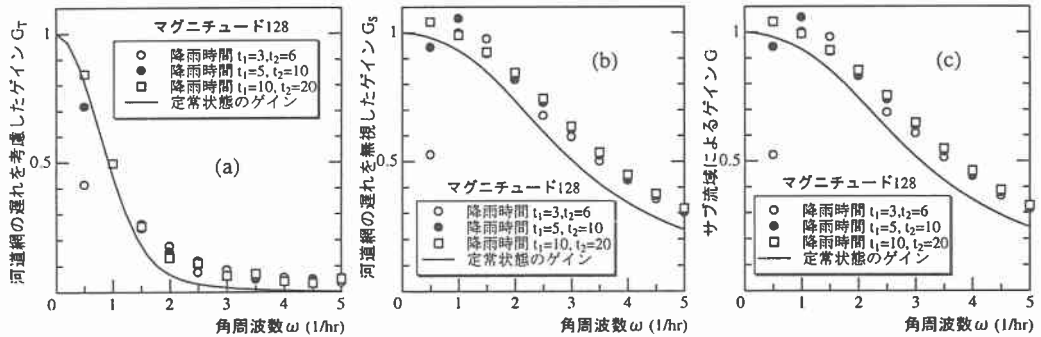


図-12 仮想流域(M=128)のゲイン特性

を理論的に求める手法を適用した<sup>9</sup>。仮想流域はサブ流域の流域面積、河道長が確率変動する総流域面積  $A_T=200(\text{km}^2)$  の流域である。今回はマグニチュード  $M=4, 8, 16, 32, 64, 128$  の場合について、 $[t_1=3(\text{hr}), t_2=6(\text{hr})]$ ;  $[t_1=5(\text{hr}), t_2=10(\text{hr})]$ ;  $[t_1=10(\text{hr}), t_2=20(\text{hr})]$  の三角形降雨波形 ( $\bar{r}=10(\text{mm/hr})$ ) 3 ケースの検討を行った。なお、ここではマグニチュードが  $M=4, 16, 128$  の場合の結果をそれぞれ図-10, 11, 12 に示す。図中の(a)~(c)が河道網の遅れを考慮した流域全体のゲイン  $G_T$ 、遅れを考慮しない流域全体のゲイン  $G_S$  とサブ流域のゲイン  $G$  である。

マグニチュード  $M$  が大きくなると、サブ流域数は  $(2M-1)$  となり、サブ流域の面積が小さくなるので、定常に達するまでの時間が短くなる。 $M=4$  のサブ流域面積の平均値が  $\bar{A}=28.6(\text{km}^2)$  で、斜面到達時間を計算すると約 4 (hr)、 $M=128$  の場合が  $\bar{A}=0.78(\text{km}^2)$  で到達時間が約 1.7(hr)となる。定常状態と見なすことの

できる時間は更にこの何倍かの時間になる。今回の計算条件では  $[t_1=3(\text{hr}), t_2=6(\text{hr})]$  の場合、流出量は過渡状態で推移することになる。図-10～12 を比較してみると、 $[t_1=3(\text{hr}), t_2=6(\text{hr})]$  の場合は図-8 と同様に、 $\omega=1.0(1/\text{hr})$  以下で一旦ゲインが急激に低下した後、 $\omega=1.0(1/\text{hr})$  以上で他のケースのゲインと同程度まで回復して推移していく傾向がわかる。これはマグニチュードが大きい(サブ流域の面積が小さい)ほど、サブ流域によるゲイン  $G$  の低下は大きい、流域全体のゲイン  $G_T$  の低下を比較するとその変化は小さい。また、角周波数が高周波数になるにつれ、降雨継続時間の違いによるゲインに対する影響は小さくなっている。

#### 4. おわりに

三角形降雨波形を流域に与えた場合、ハイドログラフは上昇してピークを迎えると、直ちに下降期が始まり、流出量の定常な状態がない。このような過渡的な状態での応答特性を把握するために、本研究では一様な降雨波形を長時間与えて流出量の定常応答を解析する周波数応答法を適用した。各周波数に対する流出量のゲイン特性は三角形降雨波形に正弦波の周期変動を付加した降雨を与えた流出計算から求め、定常応答の場合と比較・検討を行った。その結果、1) 過渡状態の流出量の応答特性は、定常応答のゲイン特性にほぼ類似した特性を示す、2) 流量が定常に達する時間に比べ降雨の継続時間が短い場合は、低周波数領域で一旦ゲインは低下するが、高周波数領域に向かうにつれてゲインは回復し、定常応答のゲインに近く、3) 三角形降雨波形のピーク値が前半に偏った波形より、後半に偏った波形の方が、高周波数領域のゲインの低下は少なく、ハイドログラフで言うと上昇期に高周波数の流出量変動が残る、以上が今回得られた知見である。しかしながらまだ課題も多く、過渡応答に周波数応答法を適用できるかの判断は、今後更なる検討が必要であろう。

#### 《謝 辞》

本研究の一部は文部省平成 10 年度科学研究費補助金・基盤研究(C)(2) (代表者：早川博) の補助と (財) 北海道河川防災センターの平成 10 年度研究助成を受けて遂行された。記して謝意を表したい。

#### 【参考文献】

- 1) 藤田睦博：降雨流出系のシステム関数の解析について、第 15 回水理講演会講演集、pp.61-66、1971.
- 2) 嵯峨浩：周波数応答法による流出解析、土木学会論文集、第 393 号 / II-9、pp.77-86、1988.
- 3) 早川博・藤田睦博・内島邦秀：周波数応答法による降雨流出系の流域スケールの検討、土木学会北海道支部論文報告集、第 54 号(B)、pp.18-23、1998.
- 4) 田中岳・藤田睦博・Luai Hamound・工藤睦信：拡張された周波数応答法の流出システムへの応用、水工学論文集、第 42 巻、pp.181-186、1998.
- 5) 星 清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係、第 26 回水理講演会論文集、pp.273-278、1982.
- 6) 早川博：流域の地形構造を考慮した降雨流出系の確率応答と流域スケールに関する研究、北海道大学博士論文、1997.