

I-95

自由振動解析のための節点プリズム要素

函館工業高等専門学校 ○正会員 渡辺 力
 長岡技術科学大学 正会員 林 正
 函館工業高等専門学校 田中 孝恒

1. まえがき

構造物の3次元応力解析や自由振動解析のために、一般化変位にバブル(内部)節線を用いずに中間節線を用いた節点プリズム要素を開発した。この要素では、安定した収束性と高い精度を有するとともに、従来の有限プリズム法において大きな制約となっていた中間支点などの境界条件の導入が容易で、隔壁を有するような複雑な構造物にも容易に適用可能であることを種々の数値計算を行って確認している¹⁾。さらに、これらの要素が有限要素との結合を可能にし、3次元応力解析に有効であることを示している²⁾。

本報告は、文献1)を補足するものであり、中間節線を用いた種々の要素を開発し、大規模構造の自由振動解析に用いるための実用性の高い要素を、数値計算を行って検討したものである。断面内に1次、2次、完全2次、3次の形状関数を用いた要素を厚板の自由振動解析に適用して、各要素の収束性と精度を調べ、計算効率を比較した結果について報告する。

2. 節点プリズム要素

(1) 節点プリズム要素

本研究では、図-1(a)に示す8個の節点と4本の節線をもつ1次要素、図-1(b)に示す16個の節点と8本の節線を有する2次要素、図-1(c)に示す18個の節点と9本の節線を有する完全2次要素、図-1(d)に示す24個の節点と12本の節線を有する3次要素の4つの節点プリズム要素を用いる。

要素の自由度として、要

素座標軸 (x, y, z) 方向の並進変位 u, v, w を用いる。節点の一般化変位 d_0 と節線の一般化変位 d_m を用いて、任意点の変位成分は節点変位と節線変位の和によって次式で表される。

$$u = \{f_{01}\}^T d_0 + \{f_{11}\}^T \sum X_m d_m, \quad v = \{f_{02}\}^T d_0 + \{f_{12}\}^T \sum X_m d_m, \quad w = \{f_{03}\}^T d_0 + \{f_{13}\}^T \sum X_m d_m \quad (1)$$

ここに、 f_{0i} と f_{1i} は要素に応じて有限要素と同じ形状関数を集めた形状関数ベクトルで、 η と ξ 方向には1次要素と完全2次要素で双一次および双二次の形状関数を、2次要素と3次要素ではセレンディピティ族の形状関数を用いている。 X_m には多項式の級数³⁾を用いる。

(2) 運動方程式

要素の自由振動における全ポテンシャルエネルギー π を停留の原理に用いると

$$\delta \pi = \delta U - \delta T = 0 \quad (2)$$

ここに、 U はひずみエネルギーで、 T は運動エネルギーである。式(2)の δU と δT は次のようになる。

$$\delta U = \int_V \epsilon_L^T D \delta \epsilon_L dV, \quad \delta T = - \int_V \rho \{ \ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w \} dV \quad (3)$$

式(3)の ϵ_L は線形のひずみベクトル、 D は弾性マトリックス、 ρ は密度、 $(\cdot)$ は時間 t に関する偏微分を表す。

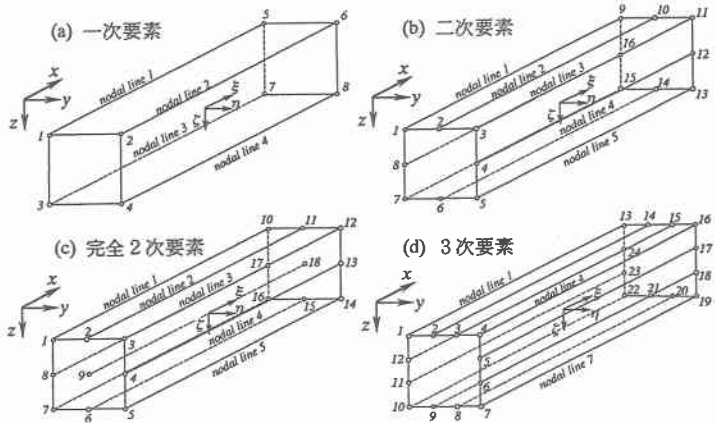


図-1 節点プリズム要素(親要素)

FINITE NODE-PRISM ELEMENTS FOR FREE VIBRATION ANALYSIS

By Chikara WATANABE, Masa HAYASHI and Takatsune TANAKA

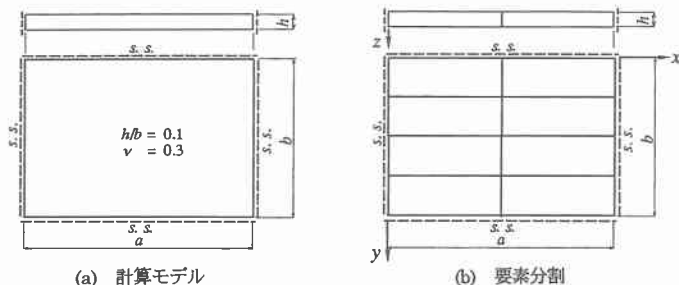


図-2 厚板

式(3)の変位成分に式(1)を用いて、次の自由振動に関する運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} k_{00} d_0 + m_{00} \ddot{d}_0 + \sum_n (k_{0n} d_n + m_{0n} \ddot{d}_n) &= 0 \\ k_{m0} d_0 + m_{m0} \ddot{d}_0 + \sum_n (k_{mn} d_n + m_{mn} \ddot{d}_n) &= 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 k_{00} などは節点ブリズム要素の剛性行列³⁾で、 m_{00} などは質量行列¹⁾である。

3. 数値計算例

(1) 正方形厚板の解析

図-2(a)に示す周辺単純支持板を計算し、各要素の収束性と精度を調べる。解析モデルは、 $a/b=1$ の正方形板で、板厚を h 、板厚比 h/b を $1/10$ 、ポアソン比を $\nu=0.3$ 、密度を ρ 、せん断弾性係数を G とする。要素分割は、図-2(b)に示すように x 軸方向(級数展開する方向)に2分割し、 y 軸と z 軸方向には、1次要素で 20×2 と 20×4 分割、2次要素と完全2次要素で 6×1 と 6×2 分割、3次要素で 4×1 と 6×1 分割を用いる。また、級数には1~5項を用い、円振動数 p の計算結果は次式の無次元振動数を用いて表す。

$$\lambda^* = ph(\rho/G)^{1/2} \quad (5)$$

表-1 は、式(5)による無次元振動数について、厳密解に対する誤差を曲げ振動 (I-A)、伸縮振動 (I-S) とせん断振動⁴⁾ (I-TS) で波形ごとに分類したものである。また、これらの I-A などの記号 A は板厚方向に中立面に対して逆対称、S は対称なモードを意味する。表中の (m,n) は、 x と y 軸方向の半波長数を示している。

表において、伸縮振動とせん断振動では、級数項と板厚方向の分割に依らず極めて良い精度の解が得られている。曲げ振動では、どの要素でも級数に3項程度を用いれば収束しており、極めて収束性が良いことが分かる。また、本要素には、方向性があるために、重根となる $(1,2)$ と $(2,1)$ 、 $(1,3)$ と $(3,1)$ では、級数方向に高次となる場合の方が精度が良いことが分かる。

曲げ振動において、1次要素では、多くの要素分割を用いた 20×4 分割でも、1~6%の誤差を生じている。2次要素と完全2次要素では、ほぼ同程度の精度となっており、 6×1 分割では、 $(1,3)$ モードで3%程度の誤差となっている他は約1%程度の誤差となっている。さらに厚さ方向にもう1分割した 6×2 分割では、 $(1,3)$ モードで2%程度の誤差となっている以外は、すべて1%以下となっていて、厚さ方向の分割の影響が大きいことが分かる。なお、 $(1,3)$ モードでの精度を改善するためには y 軸方向に要素分割を増やす必要がある。それに対して、3次要素では板厚方向に分割しなくとも極めて良い精度が得られており、 6×1 分割で、すべてのモードでの誤差が1%以下となっている。

以上より、低次要素を用いて多くの要素分割を用いるよりも、高次要素を用いて計算した方が計算精度が良いことが分かる。

(2) 長方形厚板の解析

図-2(a)に示す形状比が $a/b=2$ と 4 の周辺単純支持板を計算し、各要素の計算効率を比較する。解析モデ

表-1 正方形厚板の無次元振動数の厳密解に対する誤差

要素	要素分割	項数	波 形								
			I - A						I - S	I - TS	
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)		(0,1)	(1,0)
1次	20×2	1	1.0617	1.0698	1.1102	1.0790	1.0874	non	1.0050	1.0010	1.0038
		2	1.0417	1.0658	1.0673	1.0630	1.0862	1.1434	1.0012	1.0010	1.0001
		3	1.0412	1.0657	1.0343	1.0483	1.0861	1.0463	1.0012	1.0010	1.0000
		4	1.0412	1.0657	1.0341	1.0482	1.0861	1.0364	1.0012	1.0010	1.0000
		5	1.0412	1.0657	1.0341	1.0482	1.0861	1.0357	1.0012	1.0010	1.0000
	20×4	1	1.0398	1.0469	1.0868	1.0544	1.0631	non	1.0050	1.0010	1.0038
		2	1.0199	1.0430	1.0422	1.0378	1.0618	1.1152	1.0012	1.0010	1.0001
		3	1.0195	1.0429	1.0108	1.0239	1.0618	1.0206	1.0012	1.0010	1.0000
		4	1.0195	1.0429	1.0106	1.0238	1.0618	1.0109	1.0012	1.0010	1.0000
		5	1.0195	1.0429	1.0106	1.0238	1.0618	1.0109	1.0012	1.0010	1.0000
2次	6×1	1	1.0247	1.0172	1.0855	1.0449	1.0336	non	1.0039	1.0001	1.0038
		2	1.0041	1.0132	1.0410	1.0280	1.0323	1.1216	1.0001	1.0001	1.0001
		3	1.0037	1.0131	1.0073	1.0129	1.0323	1.0227	1.0001	1.0001	1.0000
		4	1.0037	1.0131	1.0072	1.0129	1.0323	1.0128	1.0001	1.0001	1.0000
		5	1.0037	1.0131	1.0071	1.0129	1.0323	1.0121	1.0001	1.0001	1.0000
	6×2	1	1.0212	1.0103	1.0769	1.0341	1.0211	non	1.0039	1.0001	1.0038
		2	1.0012	1.0064	1.0318	1.0172	1.0198	1.1050	1.0001	1.0001	1.0001
		3	1.0007	1.0063	1.0008	1.0033	1.0198	1.0112	1.0001	1.0001	1.0000
		4	1.0007	1.0063	1.0006	1.0032	1.0198	1.0016	1.0001	1.0001	1.0000
		5	1.0007	1.0063	1.0006	1.0032	1.0198	1.0009	1.0001	1.0001	1.0000
完全 2次	6×1	1	1.0247	1.0171	1.0854	1.0447	1.0324	non	1.0039	1.0001	1.0038
		2	1.0041	1.0130	1.0410	1.0278	1.0312	1.1216	1.0001	1.0001	1.0001
		3	1.0036	1.0129	1.0073	1.0128	1.0311	1.0227	1.0001	1.0001	1.0000
		4	1.0036	1.0129	1.0071	1.0127	1.0311	1.0128	1.0001	1.0001	1.0000
		5	1.0036	1.0129	1.0071	1.0127	1.0311	1.0121	1.0001	1.0001	1.0000
	6×2	1	1.0212	1.0101	1.0769	1.0340	1.0205	non	1.0039	1.0001	1.0038
		2	1.0011	1.0061	1.0318	1.0171	1.0192	1.1050	1.0001	1.0001	1.0001
		3	1.0007	1.0060	1.0007	1.0031	1.0192	1.0112	1.0001	1.0001	1.0000
		4	1.0007	1.0060	1.0006	1.0031	1.0192	1.0016	1.0001	1.0001	1.0000
		5	1.0007	1.0060	1.0006	1.0031	1.0192	1.0009	1.0001	1.0001	1.0000
3次	4×1	1	1.0205	1.0057	1.0763	1.0323	1.0135	non	1.0038	1.0000	1.0038
		2	1.0005	1.0017	1.0311	1.0154	1.0122	1.1039	1.0001	1.0000	1.0001
		3	1.0001	1.0016	1.0003	1.0015	1.0122	1.0105	1.0000	1.0000	1.0000
		4	1.0001	1.0016	1.0001	1.0015	1.0122	1.0009	1.0000	1.0000	1.0000
		5	1.0001	1.0016	1.0001	1.0014	1.0122	1.0003	1.0000	1.0000	1.0000
	6×1	1	1.0205	1.0043	1.0763	1.0312	1.0029	non	1.0038	1.0000	1.0038
		2	1.0005	1.0004	1.0310	1.0142	1.0016	1.1039	1.0001	1.0000	1.0001
		3	1.0000	1.0003	1.0003	1.0004	1.0016	1.0105	1.0000	1.0000	1.0000
		4	1.0000	1.0003	1.0001	1.0003	1.0016	1.0009	1.0000	1.0000	1.0000
		5	1.0000	1.0003	1.0001	1.0003	1.0016	1.0002	1.0000	1.0000	1.0000
厳密解 (λ*×10)		1.0 (0.93150)	1.0 (2.2260)	1.0 (2.2260)	1.0 (3.4207)	1.0 (4.1714)	1.0 (4.1714)	1.0 (4.4429)	1.0 (3.1416)	1.0 (3.1416)	

ルは、形状比以外は(1)の正方形厚板と同じとし、検討に用いる要素は、2次要素、完全2次要素と3次要素とする(先の計算例より、1次要素では要素分割を多くしても計算精度が悪いことより検討から除外した)。要素分割は、級数方向に2分割とし、各要素で横断面内に形状関数の次数を揃えるために、2次要素と完全2次要素で6×3分割、3次要素で4×2分割とする。

図-3は、曲げ振動の(1,1)、(2,1)、(3,1)モードについて、縦軸に厳密解に対する誤差を、横軸に総自由度数を示したものである。比較のために、20節点6面体要素を用いたFEM解⁹⁾も示してある。FEMでは、横断面内に2次要素と同じ6×3分割を用い、x軸方向には、3～15分割を用いる。また、図中の△印が2次要素、□印が完全2次要素、○印が3次要素、●印がFEMによるものである。

どのモードでも○印の3次要素が最も精度が良く、さらに最も少ない自由度数で収束していることから、3次要素が最も計算効率が良いと言える。また、2次要素、完全2次要素とFEMの収束値は、ほぼ同じ値となっているが、2次要素の方が少ない自由度数で収束している。FEMでは(1,1)モードでの収束性は良いが、高次になるに従い収束性が悪くなって、NPMと同程度の収束値を得るには、かなりの自由度数を必要とする。

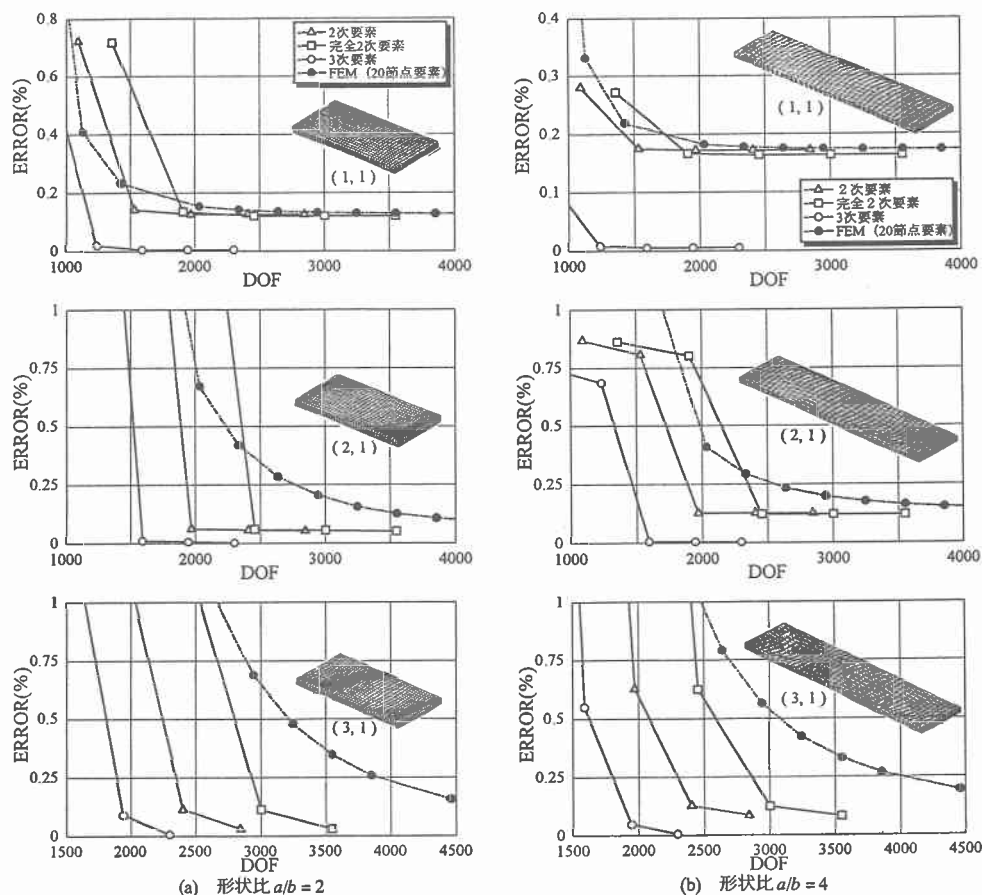


図-3 長方形厚板の無次元振動数の誤差

4. まとめ

一般化変位に中間節線を用いた節点プリズム要素を、厚板の自由振動解析に用いた結果をまとめると、

- ①節点プリズム要素は、極めて良い収束性と精度を有しており、級数に3項程度用いれば収束値を得ることができる。
- ②本解法では、低次要素よりも高次要素を用いた方が精度と計算効率が良い。また、同程度の精度が得られる自由度数で比較すると、3次要素と2次要素が計算効率が良い。
- ③FEMに比べ、かなり少ない自由度数で収束値が得られ、高次モードほどその差が大きい。

最後に、本研究は笹川科学研究助成の援助を受けたことを付記する。

参考文献

- 1) 林 正, 渡辺 力: 構造物の3次元応力解析と自由振動解析への節点プリズム法の応用, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.339-348, 1998.
- 2) 渡辺 力, 林 正, 松田真直: 3次元応力解析のための節点プリズム要素, 土木学会北海道支部論文報告集, 第54号(A), pp.234-239, 1998.
- 3) 林 正, 小林亨市: 節点プリズム法による3次元応力解析, 土木学会論文集, NO.450/I-20, pp.95-101, 1992.
- 4) 林 正, 渡辺 力: 2段階動的縮小法を用いたハイアラーキ要素による自由振動解析, 土木学会論文集 (投稿中).
- 5) NISA II ユーザーズ・マニュアル Version 93.0: Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.