

I-94

薄肉開断面桁のねじり振動解析

北海道大学大学院工学研究科	正会員	○ 松井義孝
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	林川俊郎
北海道大学大学院工学研究科	学生員	北島 勉
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	佐藤浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、その構造物に作用する外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく左右される。したがって、構造物の動的応答を正しく評価するためには、固有振動数ならびに固有振動モードを精度良く計算することが重要な課題であると言える。

薄肉断面部材の基礎的なそりねじり理論はVlasovの著書¹⁾等に詳しく述べられている。また、Krajcinovic²⁾は図心とせん断中心が一致しない薄肉直線桁の剛性マトリックスをGalerkin法を用いて誘導し、さらに初期応力マトリックスと質量マトリックスを示している。これらのマトリックスの要素は、同次微分方程式の解を用いているため双曲線関数を含む形で与えられている。これに対して、直線部材要素の変位関数を多項式で仮定する変位法(有限要素法)に基づいて、静的な剛性マトリックスと集中質量マトリックスを導いた論文として、結城・前田³⁾の研究がある。同じく薄肉開直線桁を対象として、Wekezer⁴⁾は剛性マトリックスと整合質量マトリックスを与えている。また、薄肉I形断面桁のねじり振動におけるそりねじり剛性の影響については川井・藤谷⁵⁾によって明らかにされている。

最近、筆者らは、薄肉直線桁のねじり振動に関する基礎微分方程式の一般解を用いて、新たに動的な剛性マトリックスを誘導している。さらに求められた固有円振動数に対応する固有関数を算出するための積分定数マトリックスを提示した。それらの数値計算例として薄肉開断面桁を用い、異なる質量マトリックス法による固有振動数の精度とその要素分割数の影響について検討している。さらに、新しく誘導した薄肉直線桁のねじり振動に関する動的剛性マトリックスの各要素を部材長に関してTaylor展開し、異なる質量マトリックス法との数学的な特徴と位置関係について明らかにしている。そこで、本研究は、そりねじり定数の影響の大きい薄肉開断面桁における固有振動数の精度とその要素分割数の影響について検討し、さらにねじり定数比を求めることによって考慮する純ねじり、そりねじりの領域範囲について検討することを目的としている。

2. ねじり振動解析

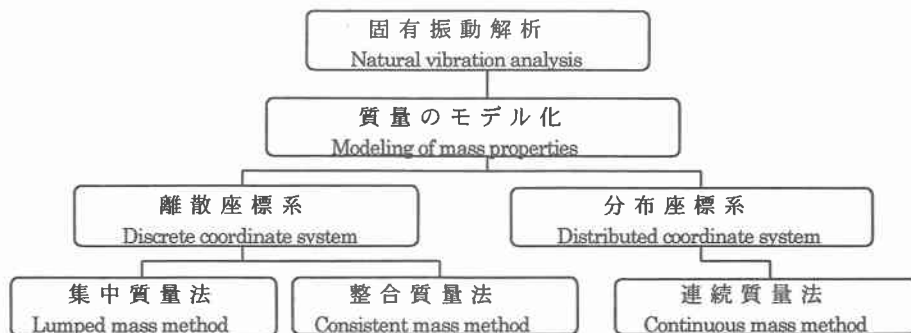
薄肉開断面桁のねじり振動解析は、部材要素の質量のモデル化により、離散座標系(discrete coordinate system)による解と分布座標系(distributed coordinate system)による解に分類することができる⁷⁻¹⁰⁾。さらに、前者には部材要素の等分布質量を両端の節点に等しく置換する集中質量法(lumped mass method)と、変位関数として3次多項式を用いて部材要素の質量を両端の節点に配分する整合質量法(consistent mass method)が代表的な方法である。後者には薄肉開断面桁の質量およびねじり剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法(continuous mass method)がある。この解法は薄肉開断面桁のねじり自由振動に関する基礎微分方程式の一般解を必要とするが、正確な固有値(厳密解)を求めることができる。一般的に、離散座標系による解は標準的な固有値問題に、分布座標系による解は超越方程式を解く問題に帰着される。ここで示した固有振動解析の概念的な分類を図-1に示す。

2.1 離散座標系による解

ここでは、一定断面を有する薄肉開断面桁について考える。また、断面は2軸対称断面とし図心とせん断中心は一致するものとする。部材要素の両端における節点のねじりモーメント(M_{x1} , M_{x2})およびそりねじりモーメント(M_{y1} , M_{y2})は、静的な剛性マトリックス K_s によってねじり角(θ_{x1} , θ_{x2})およびねじり率(θ_{y1} , θ_{y2})と関係づけられる。ねじり角を3次多項式で仮定すると、部材要素の剛性方程式は式(1)のように与えられる^{5), 11)}。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_s \mathbf{U} \quad (1) \quad \mathbf{F} = \{M_{x1}, M_{y1}, M_{x2}, M_{y2}\}^T \quad \mathbf{U} = \{\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{x2}, \theta_{y2}\}^T \quad (2)$$

Study on Torsional Vibration Analysis of Thin-Walled Beam with Open Cross Section.
by Yoshitaka MATSUI, Toshiro HAYASHIKAWA, Tutomu KITAJIMA and Koichi SATO.



図一1 質量のモデル化によるねじり振動解析手法の分類

$$K_s = \begin{bmatrix} \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{12EI_w}{L^3} - \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} \\ \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{4EI_w}{L} + \frac{2GJ}{15} & \frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_w}{L} - \frac{3GJ}{15} \\ \frac{12EI_w}{L^3} - \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{6GJ}{5L} & \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} \\ \frac{6EI_w}{L^2} - \frac{GJ}{10} & \frac{2EI_w}{L} - \frac{3GJ}{15} & \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{GJ}{10} & \frac{4EI_w}{L} + \frac{2GJ}{15} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Sym.

ここで、 EI_w はそりねじり剛性、 GJ はSt. Venantのねじり剛性、 L は部材長である。

部材要素の等分布質量を両節点に等しく配分することにより、集中質量マトリックス M_l は次のように与えられる。ここで、 m は単位長さ当たりの質量、 I_p は極慣性モーメント、 A は断面積である。さらに、式(3)で求められた静的剛性マトリックス K_s と同様の変位関数を用いると、仮想仕事の原理より以下のような整合質量マトリックス M_c が求められる。

$$M_l = \frac{mLI_p}{24A} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ & L^2 & 0 & 0 \\ & & 12 & 0 \\ \text{Sym.} & & & L^2 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \frac{mLI_p}{420A} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

したがって、各部材要素の静的剛性マトリックス K_s 、集中質量マトリックス M_l あるいは整合質量マトリックス M_c を用いて重ね合わせることで、最終的に離散座標系における振動数方程式は次のようになる。

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (6)$$

ここで、 K と M はそれぞれ境界条件より拘束節点処理された構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスであり、 ω は固有円振動数である。上式(6)の固有値問題は数学的に非常に重要な問題であり、種々の解析方法がある^{12), 13)}。本研究では固有値が近接する場合にも、比較的容易に解を求めることができるHouseholder法を用いた。

2. 2 分布座標系による解

薄肉開断面桁のねじり自由振動に関する基礎微分方程式は次のように与えられる^{1), 5)}。

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

ここで、 θ はねじり角、 $I_p = I_y/A$ である。薄肉開断面桁の固有円振動数を ω とし、調和振動するものとすれば、ねじり角 $\theta(x, t) = \tilde{\theta}(x) \cdot \exp(i\omega t)$ により、一般解は次のように求められる。

$$\tilde{\theta}(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + C_3 \cosh \nu x + C_4 \sinh \nu x \quad (8)$$

ただし、

$$\mu = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}(\lambda - 1)}, \quad \nu = \sqrt{\frac{GJ}{2EI_w}(\lambda + 1)}, \quad \lambda = \sqrt{1 + \frac{4m^2 EI_w}{(GJ)^2} \omega^2} \quad (9)$$

また、 C_1, C_2, C_3, C_4 は積分定数である。

最終的に、連続質量法による剛性方程式は次のようになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\omega) \mathbf{U} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{K}(\omega)$ は固有円振動数 ω を含む動的剛性マトリックスであることから、本研究では固有剛性マトリックスと呼ぶことにする。この固有剛性マトリックスは 4 行 4 列の正方対称マトリックスであり、各要素 k_{ij} は次の通りである。

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ \nu c S + \mu s C \} & k_{14} &= \alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ C - c \} & k_{14} &= \alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ C - c \} \\ k_{12} &= \alpha \{ \mu^2 - \nu^2 \} \{ 1 - c C \} - 2\mu \nu s S & k_{22} &= \alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ s C / \mu - c S / \nu \} \\ k_{13} &= -\alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ \mu s + \nu S \} & k_{24} &= \alpha(\mu^2 + \nu^2) \{ S / \nu - s / \mu \} \\ k_{23} &= -k_{14}, \quad k_{33} = k_{11}, \quad k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22} \\ \alpha &= EI_w / \{ 2(1 - c C) + (\nu^2 - \mu^2) / (\mu \nu) s S \} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$c = \cos \mu L, \quad s = \sin \mu L, \quad C = \cosh \nu L, \quad S = \sinh \nu L$$

この固有剛性マトリックスは通常の静的剛性マトリックスと同様に、振動系が線形であることから重ね合わせることができる。構造物の境界条件による拘束節点変位の処理を施すと、固有円振動数 ω を求めるための振動数方程式は次のように得られる。

$$\det[\mathbf{K}(\omega)] = 0 \quad (12)$$

3. 数値計算結果

数値計算例として、図-2 に示すような単径間直線桁、2 径間および 3 径間連続桁について考える。いずれの連続桁も等断面とし、等支間長 ($L=31.5\text{m}$) を有するものとする。離散座標系における連続桁の要素分割数は各径間長を等分割した 6 分割、8 分割、10 分割、12 分割の 4 通りについて考える。一方、分布座標系における連続桁の全要素分割数は分割数によらず厳密解を求めることができることから、支間数と同値とする。つまり、連続質量法による 3 径間連続桁の全要素分割数は径間数と同じ 3 とする。連続桁の各支承上の境界条件はねじり角のみを拘束するものとする。さらに、数値計算に必要な断面諸元は以下の通りである。St. Venant のねじり剛性 $GJ=6.269 \times 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ 、そりねじり剛性 $EI_p=8.379 \times 10^6 \text{ t}\cdot\text{m}^4$ 、極慣性モーメント $I_y=0.4791 \text{ m}^4$ 、断面積 $A=0.1610 \text{ m}^2$ 、単位長さ当たりの重量 $w=1.270 \text{ t/m}$ 。集中量法、整合質量法お

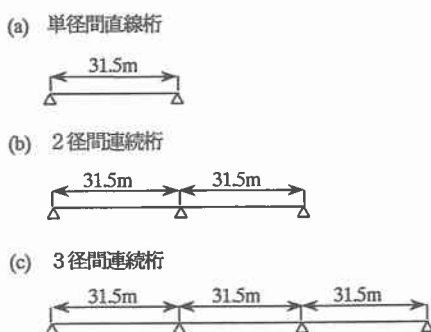


図-2 数値計算例

表-1 単径間直線桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous Mass Method
	N=6	N=8	N=10	N=12	N=6	N=8	N=10	N=12	
1	5.077 -(1.130)	5.102 -(0.643)	5.114 -(0.409)	5.120 -(0.292)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	
2	19.638 -(4.354)	20.019 -(2.499)	20.200 -(1.617)	20.300 -(1.130)	20.549 (0.083)	20.537 (0.024)	20.534 (0.010)	20.533 (0.005)	20.532
3	41.902 -(9.293)	43.678 -(5.449)	44.550 -(3.561)	45.040 -(2.500)	46.377 (0.394)	46.254 (0.128)	46.220 (0.054)	46.207 (0.026)	46.195
4	69.424 -(15.463)	74.491 -(9.293)	77.070 -(6.153)	78.545 -(4.357)	83.093 (1.181)	82.447 (0.395)	82.259 (0.166)	82.189 (0.080)	82.123
5	99.543 -(22.426)	110.570 -(13.833)	116.390 -(9.297)	119.790 -(6.647)	131.720 (2.650)	129.510 (0.927)	128.820 (0.390)	128.560 (0.187)	128.320
6		149.910 -(18.867)	160.980 -(12.876)	167.600 -(9.293)		188.150 (1.829)	186.240 (0.796)	185.500 (0.395)	184.770
7		190.530 -(24.243)	209.230 -(16.807)	220.680 -(12.254)		259.330 (3.113)	255.060 (1.416)	253.290 (0.712)	251.500
8			259.550 -(20.986)	277.690 -(15.463)			336.050 (2.303)	332.370 (1.823)	328.485
9			310.380 -(25.343)	337.290 -(18.870)			429.800 (3.382)	423.330 (1.826)	415.740
10				398.170 -(22.423)				526.880 (2.654)	513.260

表-2 2径間連続桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous Mass Method
	N=12	N=16	N=20	N=24	N=12	N=16	N=20	N=24	
1	5.077 -(1.130)	5.102 -(0.643)	5.114 -(0.409)	5.120 -(0.292)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	
2	7.914 -(1.132)	7.960 -(0.748)	7.981 -(0.486)	7.993 -(0.337)	8.021 (0.012)	8.020 (0.000)	8.020 (0.000)	8.020 (0.000)	8.020
3	19.638 -(4.354)	20.019 -(2.499)	20.200 -(1.617)	20.300 -(1.130)	20.549 (0.083)	20.537 (0.024)	20.534 (0.010)	20.533 (0.005)	20.532
4	24.751 -(4.749)	25.278 -(2.721)	25.528 -(1.759)	25.666 -(1.228)	26.019 (0.131)	25.996 (0.042)	25.990 (0.019)	25.987 (0.008)	25.985
5	41.902 -(9.293)	43.678 -(5.449)	44.550 -(3.561)	45.040 -(2.500)	46.377 (0.394)	46.254 (0.128)	46.220 (0.054)	46.207 (0.026)	46.195
6	48.862 -(9.872)	51.081 -(5.779)	52.169 -(3.772)	52.778 -(2.649)	54.507 (0.540)	54.310 (0.177)	54.254 (0.074)	54.234 (0.037)	54.214
7	69.424 -(16.463)	74.491 -(9.293)	77.070 -(6.153)	78.545 -(4.357)	83.093 (1.181)	82.447 (0.395)	82.259 (0.166)	82.189 (0.080)	82.123
8	77.679 -(16.211)	83.890 -(9.727)	86.742 -(6.435)	88.486 -(4.554)	94.066 (1.465)	93.172 (0.500)	92.904 (0.211)	92.804 (0.104)	92.708
9	99.543 -(22.426)	110.570 -(13.833)	116.390 -(9.297)	119.790 -(6.647)	131.720 (2.650)	129.510 (0.927)	128.820 (0.390)	128.560 (0.187)	128.320
10	108.480 -(23.319)	121.150 -(14.364)	127.830 -(9.642)	131.730 -(6.885)	145.390 (2.771)	143.040 (1.110)	142.140 (0.474)	141.800 (0.233)	141.470

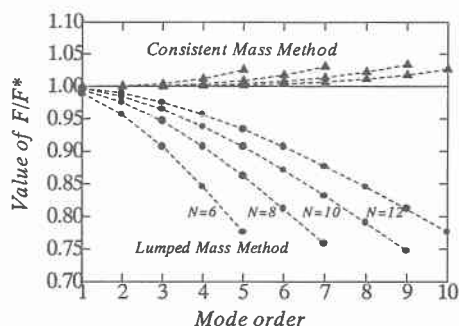
表-3 3径間連続桁のねじり固有振動数 (Hz)

Mode order	Lumped Mass Method				Consistent Mass Method				Continuous Mass Method
	N=18	N=24	N=30	N=36	N=18	N=24	N=30	N=36	
1	5.077 -(1.130)	5.102 -(0.643)	5.114 -(0.409)	5.120 -(0.292)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	5.135 (0.000)	
2	6.499 -(1.216)	6.534 -(0.684)	6.550 -(0.441)	6.559 -(0.304)	6.580 (0.015)	6.579 (0.000)	6.579 (0.000)	6.579 (0.000)	6.579
3	9.470 -(1.416)	9.529 -(0.802)	9.557 -(0.510)	9.572 -(0.354)	9.607 (0.010)	9.606 (0.000)	9.606 (0.000)	9.606 (0.000)	9.606
4	19.638 -(4.354)	20.019 -(2.499)	20.200 -(1.617)	20.300 -(1.130)	20.549 (0.083)	20.537 (0.024)	20.534 (0.010)	20.533 (0.005)	20.532
5	22.344 -(4.509)	22.794 -(2.586)	23.008 -(1.671)	23.126 -(1.167)	23.424 (0.107)	23.407 (0.034)	23.402 (0.013)	23.401 (0.009)	23.399
6	27.274 -(4.992)	27.886 -(2.860)	28.177 -(1.846)	28.337 -(1.289)	28.752 (0.157)	28.721 (0.049)	28.713 (0.021)	28.709 (0.007)	28.707
7	41.902 -(9.293)	43.678 -(5.449)	44.550 -(3.561)	45.040 -(2.500)	46.377 (0.394)	46.254 (0.128)	46.220 (0.054)	46.207 (0.026)	46.195
8	45.638 -(9.529)	47.629 -(5.582)	48.606 -(3.646)	49.153 -(2.561)	50.681 (0.468)	50.522 (0.153)	50.477 (0.063)	50.460 (0.030)	50.445
9	52.181 -(10.219)	54.644 -(5.981)	55.852 -(3.902)	56.527 -(2.741)	58.478 (0.818)	58.238 (0.203)	58.169 (0.084)	58.144 (0.041)	58.120
10	69.424 -(15.463)	74.491 -(9.293)	77.070 -(6.153)	78.545 -(4.357)	83.093 (1.181)	82.447 (0.395)	82.259 (0.166)	82.189 (0.080)	82.123

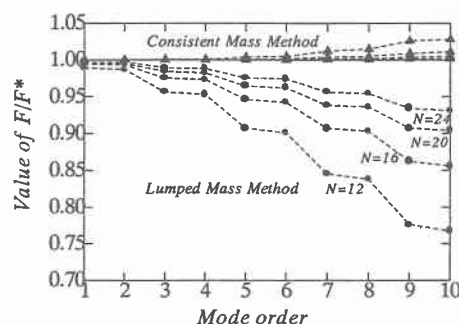
よび連続質量法により計算された単径間直線桁、2 径間連続桁、3 径間連続桁の 1 次から 10 次モードまでの固有振動数をそれぞれ表—1、2、3 に示す。連続質量法により求められた固有振動数 F^* は厳密解である。一方、離散座標系による解、すなわち集中質量法および整合質量法により求められた固有振動数 F は近似解である。表—1、2、3 の中で括弧内の数値は厳密解に対する近似解の誤差 $(F - F^*)/F^*$ を百分率で表したものである。集中質量法による解は厳密解に対して小さめの値を与え、高次固有振動モードになるにつれて解の精度が悪くなることがわかる。一方、整合質量法による解は厳密解に対してやや大きな値を与える。また、同じ要素分割数 N では、整合質量法による解は集中質量法による解に比較して、かなり良い精度で固有振動数を計算していることが確認できる。当然のことながら、いずれの解析方法も要素分割数 N が増加するにつれて徐々に厳密解に近づいて行く傾向が認められる。また、単径間直線桁の第 1 次、2 次、3 次、4 次固有振動モードにおける振動数と誤差の値は、2 径間連続桁の第 1 次、3 次、5 次、7 次固有振動モードおよび 3 径間連続桁の第 1 次、4 次、7 次、10 次固有振動モードそれぞれの計算結果と完全に一致している。この理由としては等断面かつ等支間長をもつ連続桁の径間数に応じて固有振動モード群が形成されるためと考えられる^{7), 15)}。

ねじり振動解析により得られた、単径間直線桁、2 径間連続桁、3 径間連続桁の固有振動数比 F/F^* とモード次数との関係をそれぞれ図—3、4、5 に示す。図中の●印は集中質量法による解、▲印は整合質量法による解である。集中質量法により計算された固有振動数の値は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与えることがわかる。高次固有振動モードになるにつれて、集中質量法により求められた固有振動数の精度が低下する傾向にある。集中質量法による解は整合質量法による解に比較して固有振動数の精度はかなり悪いことが認められるが、要素分割数 N を増加することにより、解の精度が向上することがわかる。また、連続桁の径間数に応じて、2 径間連続桁では 2 個ずつ、3 径間連続桁では 3 個ずつ固有振動数の接近があり、固有振動モード群が形成されていることが理解できる。

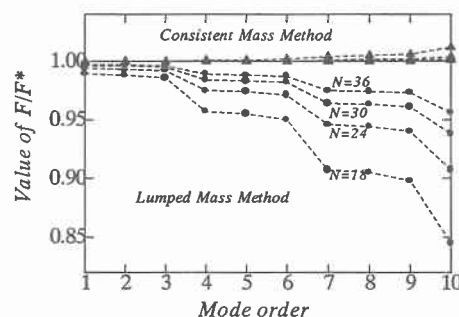
次に、ねじりモーメントを考慮する範囲を確認するためにねじり定数の影響について考察する。一般的に薄肉断面桁では、ねじりモーメントは純ねじりモーメントと、そりねじりによるねじりモーメントの和として表される。純ねじりモーメントは、断面内せん断応力度のみを生じさせ、そりねじりモーメントは桁軸方向のそりねじりによる垂直応力度を、



図—3 単径間直線桁の固有振動数比



図—4 2 径間連続桁の固有振動数比



図—5 3 径間連続桁の固有振動数比

表—4 ねじり定数比

$$\kappa = l \sqrt{\frac{GJ}{EI_w}} = 0.086$$

ここに、 $l=31.50\text{m}$
 κ : ねじり定数比

それに対応するねじりモーメントはせん断応力度を生じさせる。薄肉断面桁では一般的に充実度の大きい断面や箱桁のような閉断面では純ねじりモーメントの値が大きく、I 形断面のような開断面ではそりねじりモーメントの値が大きいと言われている。本研究の開断面桁モデルを用いて表-4からねじり定数比を求め、それらの位置関係を調べた。計算結果より開断面桁のねじり定数比 κ は0.086と求められた。パラメータ κ が0.4未満でありそりねじりの影響が支配的な範囲であり純ねじりの影響が極めて小さい。よって本研究の数値計算結果はそりねじりの影響が卓越する領域にあることがわかった。

4. あとがき

本研究は2軸対称薄肉開断面を有する直線桁のねじり固有振動解析にともなう解の精度について、集中質量法、整合質量法および連続質量法による数値計算を行うことによって検討した。ここで得られた結論および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

集中質量法により計算された薄肉直線桁のねじり固有振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。連続桁の要素分割数が増加するにつれて、近似解法による解は厳密解に近づく傾向がある。また、同じ要素分割数では整合質量法により求められた固有振動数の値は、集中質量法を用いる場合よりもかなり良い精度で計算できることがわかった。等断面等支間長を有する連続桁のねじり固有振動数は、その径間数に応じた固有値の接近が見られ、固有振動モード群を形成する。また、単径間直線桁の各次数に応じた固有振動モードは2径間、3径間連続桁の固有振動モードの中にも再現され、そのねじり固有振動数の値および厳密解に対する誤差は同じように繰り返されることが確認された。次に、ねじりモーメントを考慮する範囲としてねじり定数を計算した。開断面桁のねじり定数比 κ は、0.086と計算されパラメータ κ からその値が0.4未満であり、そりねじりの影響が支配的な範囲であることがわかった。

今後の研究課題として、2軸非対称薄肉開断面を有する直線桁および曲線桁等における固有振動数とその精度について検討する必要がある。2軸非対称断面桁は図心とせん断中心の位置が異なることから、水平および鉛直曲げ振動とねじり振動とが連成することになる。よって、集中質量法、整合質量法および連続質量法による固有振動数の精度と連成効果については今後の重要な検討課題となるであろう。

【参考文献】

- 1) Valsov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation Ltd., 1961.
- 2) Krajcinovic, D. : A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages, International J. of Solids and Structures, Vol.5, pp.639-662, 1969.
- 3) 結城皓曠・前田幸雄 : 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, 第224号, pp.67-78, 1974.
- 4) Wekezer, J. W. : Vibrational analysis of thin-walled bars with open cross sections, J. of Structural Engineering, ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, 1989.
- 5) 川井忠彦・藤谷義信 : 振動および応答解析入門, 培風館, 1991.
- 6) 林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一 : 薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究, 応用力学論文集, Vol.1, pp.303-310, 1998.
- 7) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free vibration analysis of continuous beams, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.111, No.5, pp.639-652, 1985.
- 8) 林川俊郎 : V レッグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.719-725, 1989.
- 9) Clough, R. W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Co., 2nd. ed., 1993.
- 10) Paz, M. : Structural Dynamics, Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold, 3rd. ed., 1991.
- 11) 藤谷義信 : 薄肉はり構造解析, 培風館, 1990.
- 12) 鷲津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦共編 : 有限要素法ハンドブック, 培風館, 1981.
- 13) 橋梁振動研究会編 : 橋梁振動の計測と解析, 技報堂, 1993.
- 14) Wendroff, B. : Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.
- 15) 林川俊郎・佐藤康治・角田史雄 : 平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度, 北海道大学工学部研究報告, 第148号, pp1-15, 1989.