

I - 93

不完全合成板の座屈に関する一考察

北海道大学大学院工学研究科	フェロー	佐藤 浩一
北海道大学大学院工学研究科	○学生員	橘 健太郎
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	林川 俊郎
北海道大学大学院工学研究科	正 員	小幡 卓司
北海道大学大学院工学研究科	正 員	平沢 秀之

1. まえがき

異種材料を合成し、合成構造物として使用する主な目的は、単一材料では得ることのできない望ましい力学特性を作り出すことである。また、ガイドブック的なものとして土木学会、NCB 研究会等より文献が出版されており、異なった材料を用いた合成構造物として設計することが今後さらに重要になるものと思われる¹⁾²⁾。本研究では合成構造物の一つである合成板を対象とし、その座屈に関する考察を行う。合成板には非合成板（重ね板）、あるいは完全合成板がある。非合成板は単に 2 種類の板を重ねて用いたものであり、両者の間に結合はない。これに対して、完全合成板では 2 種類の板をずれ止めで結合し、両者が完全に一体となって働くようにしたものである。しかし、ずれ止めの剛性が小さい場合にはずれが生じ、完全合成と非合成の中間の挙動を示すはずであり、定義が明確ではないが、いわゆる不完全合成板となる。

本研究は 2 種類の材料が結合された等方性不完全合成二層板の座屈に関して考察を行い、その面内荷重による座屈に関する偏微分方程式の誘導を第一の目的とする。また、より容易に不完全合成板の座屈荷重を求めることのできる簡易偏微分方程式の誘導を第二の目的とする。

2. 本論文で用いる主な記号

合成桁において離散的に配置されたずれ止めの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析している。ここで扱う合成板も合成桁と同様にずれ止めを用いるものとする。また、ずれ止めのばね定数は x, y 方向共に同じ値とする。

図-1, 2 は本解析で用いる第一板と第二板との合成板（二層板）を示している^{3)~6)}。用いる主な記号は次の通りである。

E_c, E_s : 第一板、第二板のヤング率、 ν_c, ν_s : 第一板、第二板のポアソン比、 $\bar{E}_c, \bar{E}_s: \bar{E}_c = E_c / (1 - \nu_c^2), \bar{E}_s = E_s / (1 - \nu_s^2), \bar{n} = \bar{E}_s / \bar{E}_c, A_c, A_s$: 第一板、第二板の単位幅あたりの断面積、 $A_v = A_c + A_s / \bar{n}$: 単位幅あたりの合成断面積、 I_c, I_s : 重心 C, S に関する単位幅あたりの断面 2 次モーメント、 $I_v = I_c + I_s / \bar{n} + A_c s_c s_s / \bar{n}$: 単位幅あたりの合成断面 2 次モーメント、 $D_v = \bar{E}_s I_v$: 合成板の板剛性、 K : 単位長さあたりのばね定数、 $p_z(x, y)$: 横荷重強度、 $s_c = A_s / A_v \times s, s_s = A_c / (\bar{n} A_v) \times s, W_c(x, y)$: 完全合成板のたわみ、 $W_s(x, y)$: ずれ止めの変形によるたわみ、 $\alpha = a/b$: アスペクト比、 β_{nm}, γ_{nm} : 無次元量パラメータ。

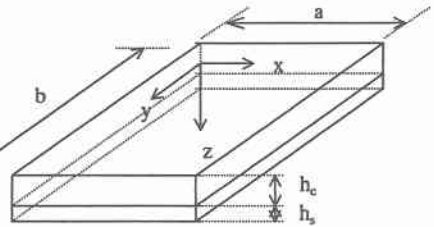


図-1 合成板の座標

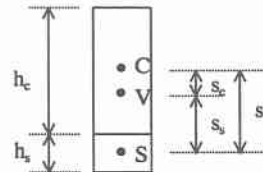


図-2 合成板の断面

Study on Buckling of Incomplete Composite Plates

by Koichi SATO, Kentaro TACHIBANA, Toshiro HAYASHIKAWA, Takashi OBATA, Hideyuki HIRASAWA

3. 不完全合成板の面外荷重による曲げ解析理論（偏微分方程式）

不完全合成板のたわみに関する偏微分方程式は次の式(1)で表される。誘導の詳細は省略する^{3),4)}。

$$D_v \left(\frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D_v \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \\ = -D_v \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_s + I_c} p_z(x, y) \quad (1)$$

次に、不完全合成板のたわみ $W_{ve}(x, y)$ は完全合成板のたわみ $W_v(x, y)$ とずれ止めの変形によるたわみ $W_e(x, y)$ の和であるとする ($W_{ve}(x, y) = W_v(x, y) + W_e(x, y)$)。式(1)は式(2)と式(3)のような2本の形で表すことができる。

$$\begin{cases} D_v \nabla^4 W_v(x, y) = p_z(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} D_e \nabla^4 W_e(x, y) - D_e \kappa^2 \nabla^2 W_e(x, y) = p_z(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

なお、式(3)における D_e および κ^2 等は次式で表される。 κ^2 は断面諸元およびばね定数より求められ、重要なパラメータの一つである。

$$D_e = D_v \frac{\bar{n} I_s + I_c}{A_c s_c s} \quad (4a), \quad \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_s + I_c} = \frac{D_v}{D_e} + 1 \quad (4b), \quad \kappa^2 = K \cdot \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_s + I_c} \cdot \frac{\bar{n}}{\bar{E}_s A_c} \cdot \frac{s}{s_c} \quad (5)$$

4. 不完全合成板の面内荷重による弾性座屈の解析理論（偏微分方程式）

面内荷重を受ける平板は座屈する前は縮みだけであるが、座屈後の平板の単位幅の微小要素を取り出し⁷⁾、これに働いている鉛直下向き方向の力を考えると単位面積あたり次式のような関係が得られる。

$$p_z(x, y) = - \left(N_{vx} \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x^2} + N_{vy} \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial y^2} + 2 N_{vxy} \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (6a)$$

$$p_z(x, y) = - \left(N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + N_{vey} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2 N_{vexy} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (6b)$$

$$\frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x^2} = \frac{N_{vex}}{N_{vx}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial y^2} = \frac{N_{vey}}{N_{vy}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} \quad (7b)$$

$$2 \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x \partial y} = 2 \frac{N_{vexy}}{N_{vxy}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (7c)$$

式(6a)～式(7c)を用いれば、たわみに関する偏微分方程式(1)より、面内荷重による座屈に関する偏微分方程式が誘導できる。図-3のような長方形板に面内荷重 N_{vex} 、 N_{vey} 、 N_{vexy} が同時に作用することにより面外に曲げ変形 $W_{ve}(x, y)$ を起こして座屈する場合、その基本偏微分方程式は次式の通りである^{5),6)}。

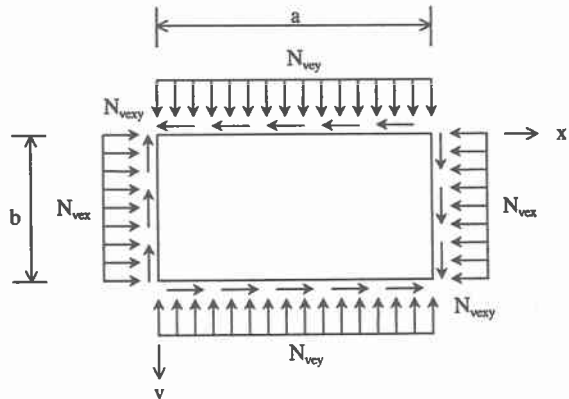


図-3 軸方向圧縮力，せん断力を受ける合成板

$$D_v \left(\frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right)$$

$$- D_v \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ D_v \kappa^2 \left(\frac{N_{vex}}{N_{vx}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{N_{vey}}{N_{vy}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2 \frac{N_{vexy}}{N_{vxy}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ \left(\frac{D_v}{D_e} + 1 \right) \left(N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + N_{vey} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2 N_{vexy} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

一例として、図-4のように x 方向圧縮力 N_{vex} のみが作用する長方形合成板を考えた場合、式(8)より偏微分方程式は次式のように表される。

$$D_v \nabla^4 W_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + D_v \kappa^2 \frac{N_{vex}}{N_{vx}} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + \left(\frac{D_v}{D_e} + 1 \right) N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

または、次式で表される。

$$D_v \nabla^4 W_{ve}(x, y) + \eta \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

ここで、式(10)の η は次式の通りである。

$$\eta = -D_v \kappa^2 + D_v \kappa^2 \frac{N_{vex}}{N_{vx}} + \left(\frac{D_v}{D_e} + 1 \right) N_{vex} \quad (11)$$

式(10)は完全合成板の x 方向圧縮力による弾性座屈の解析理論と同形の偏微分方程式となっている。また、 N_{vx} は完全合成板の場合の座屈荷重であり、次式で与えられる⁷⁻¹³⁾。

$$N_{vx} = k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} \quad (12)$$

式(11)と式(12)とを等値すれば次式のようになる。

$$\eta = k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} = -D_v \kappa^2 + \kappa^2 \frac{b^2}{k_x \pi^2} N_{vex} + \left(\frac{D_v}{D_e} + 1 \right) N_{vex} \quad (13)$$

上式より N_{vex} (不完全合成板の場合の座屈荷重) は次式で与えられる。

$$\frac{1}{N_{vex}} = \frac{D_v + D_e \left(1 + \frac{\kappa^2 b^2}{k_x \pi^2} \right)}{D_v D_e \left(\frac{k_x \pi^2}{b^2} + \kappa^2 \right)} \quad (14)$$

ここで、式(12)、式(13)および式(14)の k_x は座屈係数であり、応力状態、境界条件等により異なるものであることは周知の通りである。なお、 x 方向圧縮力のみが作用し、四辺単純支持の場合の座屈係数は次式で表される⁷⁻¹³⁾。

$$k_x = \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{m}{\alpha} \right)^2 \quad (15)$$

次に、式(1)が式(2)と式(3)の2本の形で表すことができたと同様に、式(9)は次の式(16)と式(17)の2本の形で表されるとする。

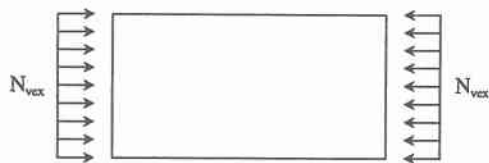


図-4 x 方向圧縮力を受ける合成板

$$\begin{cases} D_v \nabla^4 W_v(x, y) + N_{vx} \frac{\partial^2 W_v(x, y)}{\partial x^2} = 0 & (16) \\ D_e \nabla^4 W_e(x, y) - D_e \kappa^2 \frac{\partial^2 W_e(x, y)}{\partial x^2} + N_{ex} \frac{\partial^2 W_e(x, y)}{\partial x^2} = 0 & (17) \end{cases}$$

上式から得られる座屈荷重は N_{vx} および N_{ex} であり、次式の通りである。 N_{vx} は前述の式(12)である。

$$N_{vx} = k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} \quad (18a), \quad N_{ex} = k_x \frac{\pi^2 D_e}{b^2} \left(1 + \frac{b^2 \kappa^2}{k_x \pi^2} \right) = k_x \frac{\pi^2 D_e}{b^2} + D_e \kappa^2 \quad (18b)$$

式(18a)と式(18b)より不完全合成板の座屈荷重 N_{vex} を求める際に、ランキン(14)の座屈に関する式¹⁴⁾を適用してみる。非常に短い柱の場合は、圧縮荷重 P_c において破壊を起こし、反対に非常に長い柱の場合はオイラー(15)の座屈荷重 P_E で座屈を起こす。ランキン(14)の座屈に関する式は、これらの中間の長さの柱の座屈荷重 P_{cr} は次式で与えられると仮定したものである。

$$\frac{1}{P_{cr}} = \frac{1}{P_c} + \frac{1}{P_E} \quad (19)$$

上式の発想を用い、不完全合成板の座屈荷重 N_{vex} を求めてみれば、次式のようになる。

$$\frac{1}{N_{vex}} = \frac{1}{N_{vx}} + \frac{1}{N_{ex}} = \frac{N_{vx} + N_{ex}}{N_{vx} N_{ex}} = \frac{k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} + k_x \frac{\pi^2 D_e}{b^2} \left(1 + \frac{b^2 \kappa^2}{k_x \pi^2} \right)}{k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} \cdot k_x \frac{\pi^2 D_e}{b^2} \left(1 + \frac{b^2 \kappa^2}{k_x \pi^2} \right)} = \frac{D_v + D_e \left(1 + \frac{\kappa^2 b^2}{k_x \pi^2} \right)}{D_v D_e \left(\frac{k_x \pi^2}{b^2} + \kappa^2 \right)} \quad (20)$$

よって、上式より求められる N_{vex} は式(14)より求められるものと同一のものであることが判明し、1本で表した偏微分方程式あるいは2本で表した偏微分方程式のどちらを用いてもよいことがわかる。

ここで、ばね定数 K が無限大、すなわち完全合成板である場合は式(5)、式(18b)より N_{ex} が無限大となり、式(20)より $N_{vex} = N_{vx}$ となることがわかる。同様に、ばね定数 K が0である場合は N_{vex} は重ね板の座屈荷重を表していることがわかる。

5. 簡易偏微分方程式

次に、簡易的に不完全合成板の座屈荷重を求めるため、式(20)を次のように変形する。

$$\frac{1}{N_{vex}} = \frac{1}{N_{vx}} + \frac{1}{N_{ex}} = \frac{1}{N_{vx}} \left(1 + \frac{N_{vx}}{N_{ex}} \right) = \frac{1}{N_{vx}} (1 + \gamma_{mn}) \quad (21)$$

上式より完全合成板の座屈荷重 N_{vx} を γ_{mn} を用いて減減することにより、容易に不完全合成板の座屈荷重 N_{vex} を求めることができる。パラメータ γ_{mn} は2本の偏微分方程式より求められた N_{vx} と N_{ex} との比で表され、座屈係数、断面諸元、およびばね定数より求めることができる。また、不完全さを表すパラメータ β_{mn} を用いて次式で表される。

$$\gamma_{mn} = \frac{D_v}{D_e} \frac{1}{1 + \frac{b^2 \kappa^2}{k_x \pi^2}} = \frac{D_v}{D_e} \beta_{mn} \quad (22a), \quad \beta_{mn} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 \kappa^2}{k_x \pi^2}} \quad (22b)$$

式(21)を次式のように変形する。ここで板剛性 D_v を $(1 + \gamma_{mn})$ で除した値を D_w とする。

$$N_{vex} = N_{vx} \frac{1}{1 + \gamma_{mn}} = k_x \frac{\pi^2 D_v}{b^2} \frac{1}{1 + \gamma_{mn}} = k_x \frac{\pi^2}{b^2} \frac{D_v}{1 + \gamma_{mn}} = k_x \frac{\pi^2 D_w}{b^2} \quad (23)$$

$$D_w = \frac{D_v}{1 + \gamma_{mn}} \quad (24)$$

式(23)の最後の項は板剛性 D_v を D_w に低減した場合の完全合成板の座屈荷重の解と同形になっている(式(12)参照)。

よって次式のように式(10)と同形の偏微分方程式が得られ、ここではこれを簡易偏微分方程式とする。

$$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (24)$$

上式からは、式(9)および式(16)と式(17)の座屈荷重と同様の座屈荷重が得られるが、上式の利点は D_w さえ求めれば座屈荷重 N_{vex} を直接求めることができることである。

また、 x 方向圧縮応力、 y 方向圧縮応力、せん断応力が同時に作用する場合には簡易偏微分方程式は次式のようになる。

$$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + N_{vey} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + 2N_{vexy} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (25)$$

各応力状態の座屈荷重は、式(22a)と式(23)においての座屈係数 k_x を各応力状態に応じた座屈係数に置き換えることによって容易に求めることができる。また、座屈係数は従来の一枚の板の場合と同様のものを用いることができる。ここで、 x 方向圧縮力のみ、 y 方向圧縮力のみ、せん断力のみ、純曲げの場合の簡易偏微分方程式、座屈係数⁹⁾、座屈荷重を表-1に示す。

表-1 簡易偏微分方程式、座屈係数、座屈荷重

	簡易偏微分方程式	座屈係数	座屈荷重
純圧縮 (x 方向)	$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + N_{vex} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} = 0$	$k_x = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m} \right)^2$	$N_{vex} = k_x \frac{\pi^2 D_{vv}}{b^2}$
純圧縮 (y 方向)	$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + N_{vey} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} = 0$	$k_y = \left(\frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha}{n} \right)^2$	$N_{vey} = k_y \frac{\pi^2 D_{vv}}{b^2}$
せん断力	$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + 2N_{vexy} \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$	$\alpha \geq 1 \quad k_{xy} = 5.34 + \frac{4.00}{\alpha^2}$ $\alpha < 1 \quad k_{xy} = 4.00 + \frac{5.34}{\alpha^2}$	$N_{vexy} = k_{xy} \frac{\pi^2 D_{vv}}{b^2}$
純曲げ	$D_{vv} \nabla^4 W_{ve}(x, y) + N_{vex} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} = 0$	$\alpha \geq \frac{2}{3} \quad k_m = 23.9$ $\alpha < \frac{2}{3} \quad k_m = 15.87 + \frac{1.87}{\alpha^2} + 8.6\alpha^2$	$N_{vex} = k_m \frac{\pi^2 D_{vv}}{b^2}$

なお、式(25)で表されるように、2種類以上の面内荷重が同時に作用している場合は、1つずつの応力状態の偏微分方程式の座屈解を求めておいて、後で近似的に重ね合わせればよい⁹⁾。

6. 数値計算例

前述の簡易微分方程式を用いて各応力状態の四辺単純支持不完全合成板の座屈荷重を求める。

図-1、図-2において以下の数値を用いる。

$a=300\text{cm}$, $b=200\text{cm}$, $h_c=10.0\text{cm}$, $h_s=0.9\text{cm}$ 。

第一板をコンクリート、第二板を鋼とする。

$E_c=3.0 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$, $E_s=2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$, $\nu_c=0.2$, $\nu_s=0.3$, $\bar{E}_c=3.125 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$, $\bar{E}_s=2.308 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$,

$\bar{n}=7.385$, $A_c=10.0\text{cm}^2/\text{cm}$, $A_s=0.9\text{cm}^2/\text{cm}$, $A_v=2.254\text{cm}^2/\text{cm}$, $I_c=83.333\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_s=0.0608\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_v=38.075\text{cm}^4/\text{cm}$,

$s=5.45\text{cm}$, $s_c=2.176\text{cm}$, $s_s=3.274\text{cm}$, $D_v=8.788 \times 10^7 \text{kgfcm}^2/\text{cm}$, $D_c=6.208 \times 10^7 \text{kgfcm}^2/\text{cm}$ 。

ばね定数は x, y 方向共に $K=5000 \text{kgf/cm/cm}$ とする。

また、 $\kappa^2=0.024/\text{cm}^2$ となる。

計算結果を表-2に示す。各応力状態に応じて座屈係数を用いれば、電卓のみでパラメータ β_{mn} および γ_{mn} 、低減された板剛性 D_w 、完全合成板の場合の座屈荷重 N_v 、不完全合成板の場合の座屈荷重 N_{ve} を容易に求めることができる。

7. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 不完全合成板の曲げ解析において、たわみに関する偏微分方程式は1本、あるいは2本で表することができる。また、偏微分方程式中の κ^2 はばね定数を含んでおり、重要なパラメータの一つである。
- (2) たわみに関する偏微分方程式を用いて、面内荷重による座屈に関する1本で表す偏微分方程式と、2本で表す偏微分方程式の誘導を行った。両者より求められる座屈荷重の解は同一であることが判明した。2本で表した偏微分方程式の利点は不完全さを表すパラメータである β_{mn} 、 γ_{mn} を求められることである。
- (3) ランキンの座屈に関する式(19)は不完全合成板の座屈荷重を求める際にも適用できることが判明した。また、式(20)と式(21)において、ばね定数 K が無限度の場合は完全合成板の座屈荷重を表し、ばね定数 K が0の場合は重ね板の座屈荷重を表していることがわかった。すなわち、両極端を包含している。
- (4) 容易に不完全合成板の座屈荷重を求めるための簡易偏微分方程式の誘導を行った。すなわち、不完全合成板の板剛性を低減することにより、完全合成板とみなして座屈荷重を求めることができる。また、応力状態が異なる場合は、それぞれの応力状態の場合の γ_{mn} と座屈係数を用いるだけでよい。座屈係数は従来の一枚の板の場合のものを示している。
- (5) 公式集¹⁹⁾、電卓のみで容易に各応力状態の不完全合成板の場合の座屈荷重が求められることを数値計算例で示した。

表-2 不完全合成板の座屈荷重

	x方向力のみ	せん断力のみ	純曲げ
k	4.0	7.12	23.9
β_{mn}	0.068	0.115	0.305
γ_{mn}	0.097	0.163	0.431
$D_{vv}(\text{kgfcm}^2/\text{cm})$	8.013×10^7	7.556×10^7	6.140×10^7
$N_v(\text{kgf/cm})$	86642	154224	517690
$N_{ve}(\text{kgf/cm})$	78980	132609	361769

【参考文献】

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989.
- 2) NCB 研究会編：新しい合成構造と橋、山海堂、1996.
- 3) 佐藤浩一、渡辺 昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989.
- 4) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1245-1258、1990.
- 5) Koichi SATO：Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992.
- 6) 佐藤浩一：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、構造工学論文集 Vol.38A、pp.1309-1320、1992.3.
- 7) 伊藤 學：鋼構造学、コロナ社、1985.
- 8) 渡辺 昇：橋梁工学、朝倉書店、1994.
- 9) 小堀為雄、吉田 博：鋼構造設計理論、森北出版、1977.
- 10) 関谷 壮、斉藤 渥：薄板構造力学、共立出版、1968.
- 11) Rudolph Szilard：Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 12) S.P.Timoshenko and J.M.Gere：Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.
- 13) C.T.ワン、猪瀬寧雄：応用弾性学、森北出版、1971.
- 14) 関谷 壮、角誠之助、谷村眞治、岡本正明、金岡昭治：最新材料力学、朝倉書店、1990.
- 15) 土木学会編：構造力学公式集、1986.