

I-82

水平張力を受ける丸棒の固有振動解析と実験

北海道大学大学院工学研究科	F 会員	林川 俊郎
北海道大学工学部	○学生員	目時 政紀
北海道大学大学院工学研究科	正 員	及川 昭夫
北海道大学大学院工学研究科	正 員	小幡 卓司

1. まえがき

斜張橋やニールセン橋などのケーブル構造物では、架設時にケーブル張力がある範囲で設計値を満足するように調整が行われる。ケーブルの張力はロードセルや油圧ジャッキを用いて直接測定することもできるが、最近ではケーブルの固有振動数から張力を推定する振動法がよく利用されている。振動法の研究として、ケーブルの曲げ剛性やサグの影響を考慮し、1次または2次の固有振動数から張力を算出する実用的な式を導いた、新家らの研究¹⁾が知られている。また、常時微動法を適用しケーブルの高次モードの固有振動数から、張力を推定する方法²⁾も研究されている。

ところで、振動法ではケーブルを曲げと張力を受ける梁として扱うため、曲げ剛性を予備実験にて求めておく必要がある。しかし、ケーブル全体の動特性解析において重要になる曲げ剛性は、山口ら³⁾が指摘しているように、ケーブルは素線体の集合であるため、棒材のようにヤング係数と断面形状から一義的に決定されるものではない。また、導入張力や境界条件により曲げ剛性値が異なるために⁴⁾、ケーブル架設時のすべての張力や境界条件での曲げ剛性を正確に把握し再現することは困難である。そのため、現状では代表的な条件に対して曲げ剛性を測定するに留まっている。

最近では、山極らが振動数方程式の解の規則性に着目し、固有振動数とそのモード次数との関係式を導き、最小二乗法を適用して曲げ剛性と張力を同時に算定する方法⁵⁾を提案している。また、拡張カルマンフィルタによるケーブルの曲げ剛性と張力を同時推定する研究⁶⁾もなされている。

上述した振動法に基づく張力計算は、大部分がケーブルの境界条件を単純または固定とみなしている。しかし、実際には境界条件は単純支持と固定支持の間にあると考えられる。そのため、境界条件に回転ばね支持を取り入れた推定法⁷⁾も考案されている。

本研究は、ケーブルの境界条件を回転ばねと考え、固有振動数とそのモード次数との関係式を導き、最小二乗法を適用し収束計算を行うことで、測定された複数の固有振動数からケーブルの曲げ剛性と張力、境界条件を推定することを目的としている。まず、水平張力を受けるケーブルのたわみに関する運動方程式から振動数方程式を導き、境界条件を回転ばねと考えモード次数とその固有振動数の関係式を導く。その関係式に最小二乗法を適用し、曲げ剛性と張力、境界条件の推定手法を示す。さらに、固有振動数解析により得られた固有振動数の値と丸棒を用いた振動実験により得られた実験値との比較により、ここで示す推定手法の妥当性について検討する。

2. 解析方法

2-1 水平張力を受けるケーブルの振動

水平張力を受けるケーブルのたわみに関する運動方程式は、サグの影響を無視すると次式で表される。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots (1)$$

Free Vibration Analysis and Tests of Solid Bar Subjected to Horizontal Tensile Force
by Toshiro HAYASHIKAWA, Masanori METOKI, Akio OIKAWA and Takashi OBATA

ここで w はケーブルのたわみ変位, EI は曲げ剛性, T は水平張力, ρ は密度, A は断面積を表す。たわみ変位をモード $W(x)$ と時間の関数 $\exp(i\omega t)$ との積と考え $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ と変数分離した形で表示し, かつ $\rho A = m$ と置くと次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{T}{EI} \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{m \omega^2}{EI} W = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで, ω は固有円振動数である。式(2)の一般解を $W = Ae^{\mu x}$ と置き特性方程式を解くと, たわみのモード W の一般解は次式で表される。

$$W = A \cos \mu x + B \sin \mu x + C \cosh vx + D \sinh vx \quad \dots \dots \dots (3)$$

ただし,

$$\mu = \sqrt{\frac{T}{2EI} \left(\sqrt{1 + \frac{4mEI \omega^2}{T^2}} - 1 \right)}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{2EI} \left(\sqrt{1 + \frac{4mEI \omega^2}{T^2}} + 1 \right)} \quad \dots \dots \dots (4)$$

式(3),(4)にて, 境界条件を両端単純支持, 両端固定支持, 両端回転ばね支持の場合における 3 通りの振動数方程式を導くと, 以下に示すようになる。

(1)両端単純支持の場合: 両端単純支持の境界条件のもとに式(3)を解くと, 次の振動数方程式を得る。

$$\sin \mu l = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

式(5)は周期性を持ち, 次式で表される。

$$\mu l = n\pi, \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad \dots \dots \dots (6)$$

上式に式(4)を代入すると, モード次数 n とその固有振動数 f_n との間に次の関係が成り立つ。

$$f^2 = \frac{\pi^2 EI}{4ml^4} n^4 + \frac{T}{4ml^2} n^2 \quad \dots \dots \dots (7)$$

(2)両端固定支持の場合: 両端固定支持の境界条件のもとに式(3)を解くと, 次の振動数方程式が得られる。

$$2\mu v (1 - \cos \mu l \cosh vl) + (v^2 - \mu^2) \sin \mu l \sinh vl = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

双曲線関数は vl の値が大きい場合, 次の関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{\cosh vl} = 0, \quad \frac{\sinh vl}{\cosh vl} = 1 \quad \dots \dots \dots (9)$$

この関係式を用いると, 式(8)は次のように簡略化できる。

$$\sin(\mu l - \theta) = 0, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\mu v}{(v^2 - \mu^2)} \quad \dots \dots \dots (10)$$

単純支持同様, 式(10)は周期性を持ち, モード次数 n とその固有振動数 f_n との間の関係式は次式となる。

$$f^2 = \frac{\pi^2 EI}{4ml^4} \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^4 + \frac{T}{4ml^2} \left(n + \frac{\theta}{\pi} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (11)$$

(3)両端回転ばね支持の場合: 回転ばね定数を K とおくと両端回転ばね支持の境界条件は次のように表される。

$$W = 0, \quad \text{at } x = 0, l, \quad K \frac{dW}{dx} = EI \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad \text{at } x = 0, l \quad \dots \dots \dots (12)$$

式(3),(12)から振動数方程式を導くと次式を得る。

$$2\mu v K^2 (1 - \cos \mu l \cosh vl) + \{ K^2 (v^2 - \mu^2) - E^2 I^2 (\mu^2 + v^2)^2 \} \sin \mu l \sinh vl = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

固定支持同様, 式(9)の関係を用いると, 式(13)は式(10)と同じ式になる。ただし, θ の値は次式で表される。

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\mu v K^2}{K^2 (v^2 - \mu^2) - E^2 I^2 (\mu^2 + v^2)^2} \quad \dots \dots \dots (14)$$

単純, 固定支持の場合と同様の計算により, モード次数 n と固有振動数 f_n との間に次の関係式が導かれる。

$$f^2 = \frac{\pi^2 EI}{4ml^4} \left(n + \frac{\theta}{\pi}\right)^4 + \frac{T}{4ml^2} \left(n + \frac{\theta}{\pi}\right)^2 \quad \dots \dots \dots (15)$$

式(14)に、 $K=0$ を代入すると $\theta=0$ 、 $K=\infty$ を代入すると式(10)の θ となり、式(15)が単純支持から固定支持までを表現していることがわかる。

2-2 水平張力と曲げ剛性、回転ばね定数の推定方法

式(15)より固有振動数の2乗は、モード次数 n の多項式で表現できることから、複数の固有振動数を求め最小二乗法を適用すれば、同式の係数である曲げ剛性と張力を求めることができる。式(14)で定義される θ は固有振動数の関数であるため、モード次数 n に対応する値を θ_n とする。 $(n + \theta_n/\pi)$ を X_n で置き換え最小二乗法を適用すると次式を得る。

$$\frac{1}{4ml^2} \begin{bmatrix} \sum X_n^4 & \sum X_n^6 \\ \sum X_n^6 & \sum X_n^8 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\pi^2 EI}{l^2} \right\} = \begin{bmatrix} \sum f_n^2 X_n^2 \\ \sum f_n^2 X_n^4 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (16)$$

ただし、式(14)で定義された θ は張力と曲げ剛性の関数であり、値を求めるには収束計算を行う必要がある。回転ばね定数 K については予め値を与え、最適なものを採用することとした。なお、式(14)の分母にて、 K と f_n の大小関係により θ_n の値が正の値と負の値をとり、近似曲線が不連続になることを考慮し、 θ_n の正負で場合分けをした。以下に計算手順を示す。

- 1)回転ばね定数 K を設定する ($1 \sim 10000 \text{ Nm/rad}$)。
- 2)初期値を $\theta_n^{(0)}=0$ とし、測定したモード次数 n と固有振動数 f_n を式(16)に代入して $T^{(0)}, EI^{(0)}$ を計算する。
- 3)得られた $T^{(0)}, EI^{(0)}$ と測定値 f_n を式(14)の θ に代入し、 $\theta_n^{(1)}$ を計算する。ただし、 $\omega_n=2\pi f_n$ 。
- 4)得られた $\theta_n^{(1)}$ の正負を判定し、それぞれについて n および f_n を式(16)に代入し、 $T^{(1)}, EI^{(1)}$ を計算する。
- 5)以後、上記手順3),4)を次の判別式が満足されるまで繰り返す。

$$\left| 1 - T^{(j-1)}/T^{(j)} \right| < \varepsilon, \quad \left| 1 - EI^{(j-1)}/EI^{(j)} \right| < \varepsilon \quad \text{ただし、} \varepsilon = 1.0 \times 10^{-4} \quad \dots \dots \dots (17)$$

- 6)得られた $T^{(0)}, EI^{(0)}$ を式(14),(15)に代入し、繰り返し計算により $f_n^{(0)}$ を計算する。ただし、初期値 $f_n^{(0)}$ には測定値 f_n を利用する。

- 7)測定値 f_n と計算値 $f_n^{(0)}$ を次の判別式に代入し、式の値が小さいほうの $T^{(0)}, EI^{(0)}$ を採用する。ここで p は測定された振動数の個数である。

$$1/p \sum \left| \left(1 - f_n / f_n^{(j)} \right) \right| \quad \dots \dots \dots (18)$$

- 8)各 K で計算された T, EI を手順7)同様、式(18)を用いて最小の T, EI, K を採用する。

以上の手順で計算により、測定されたモード次数と固有振動数から、ケーブルの曲げ剛性と張力を推定でき、さらに離散的ではあるが回転ばね定数の値も求めることができる。

3. 数値計算

上述した計算手順の妥当性を数値計算にて検討する。数値計算に必要な断面諸元を表—1示す。これは後に述べる実験で用いた丸棒の諸元である。数値計算は丸棒を20分割し10次モードまでの固有振動数を、両端単純支持、両端固定支持についてそれぞれ求めた。固有振動解析で求めた値が式(14),(15)の繰り返し計算より求めた値とほとんど等しいことを確認してから、計算手順に従って計算を進めることとする。ただし、境界条件は既知のため、予め $K=0$ と $K=10000 \text{ Nm/rad}$ をそれぞれに代入、上述の計算手順1),8)

表—1 数値実験で用いたモデルの諸元

密度	$7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
ヤング係数	$2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
長さ	5.00m
半径	5.69mm

は省略した。また異なる境界条件を与えた場合にどの程度差が出るかを確認するため、単純支持、固定支持の両方について $K=0, 10000 \text{ Nm/rad}$ を代入し、固有振動解析に用いた値と推定値の比較を行った。計算結果を表一2 に示す。固有振動解析に用いた値と計算値を比較した際、当然のことながら境界条件を正しく設定した場合には、得られた推定値は妥当と考えられる。

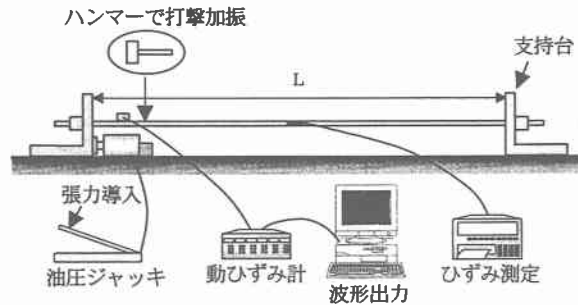
表一2 数値計算結果

固有振動解析の設定条件			計算手順で推定された値			
境界 条件	曲げ 剛性 (Nm ²)	水平 張力 (N)	推定曲げ剛性(Nm ²) (推定値/設定値)		推定張力(N) (推定値/設定値)	
			K=0	K=10000	K=0	K=10000
単純	10.6	980	11.2 (1.06)	10.4 (0.98)	1021 (1.04)	935 (0.95)
		2450	11.1 (1.05)	10.5 (0.99)	2517 (1.03)	2384 (0.97)
		3920	11.1 (1.05)	10.6 (1.00)	4008 (1.02)	3841 (0.98)
固定		980	11.6 (1.09)	10.8 (1.02)	1068 (0.92)	977 (1.00)
		2450	11.5 (1.08)	10.8 (1.02)	2589 (1.06)	2452 (1.00)
		3920	11.4 (1.08)	10.9 (1.03)	4102 (1.05)	3931 (1.00)

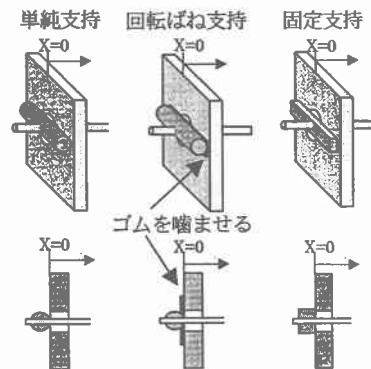
4. 振動実験

4-1 実験方法

実験装置を図一1 に示す。丸棒の諸元は数値計算で用いた表一1 と同様である。直径は長さ方向の数力所で測定した平均値を用いている。丸棒の両端をねじ加工し、図一2 に示すよう境界条件を設定する。単純支持は曲面を、固定支持は平面を支持台に密着させることで、回転ばねについては単純支持の境界条件にゴムを噛ませることで模擬する。右端の支持台を完全に固定し、左端を油圧ジャッキで加圧することにより張力を導入する。設定張力は、ひずみゲージを丸棒の上下および両側面の4点に張り、測定されたひずみの平均値を用いて算定することとした。加振方法はハンマーによる打撃加振を行い、打撃位置は左端より 55cm とする。振動数の測定は、左端より 30cm の位置に加速度センサーを設置し、応答値を動ひずみ計で増幅し、A/D 変換ボードを介してパソコンにデジタルデータとして入力し応答波形を得る。サンプリング周波数は 500Hz、20 秒間測定した。



図一1 実験装置



図一2 境界条件

4-2 実験結果

実験は、両端単純支持と両端固定支持について、設定張力 1000N, 2500N, 4000N 付近における振動実験を行った。ひずみゲージの値の平均値とその値から計算された張力を表一3 に示す。測定された応答加速度波形に FFT 解析を行い、固有振動数を算定する。設定張力 1000N、両端固定支持における FFT 解析結果例を図一3 に示す。同図より固有振動数の周期性を考慮すると、

表一3 実験における設定張力

境界条件	ひずみの平均値 ($\times 10^{-6}$)	張力 (N)
単純	199.5	1039
	475.5	2489
	753.5	3940
固定	191.0	1000
	468.5	2450
	750.5	3930

1次から14次の固有振動数を読み取ることができる。
 $T=1000\text{N}$, 両端固定支持における振動数 f の2乗とモード次数 n の2乗のグラフを図-4に、表-4に単純支持、固定支持における各張力のモード次数と固有振動数の測定結果まとめてを示す。計算手順に従い、 EI, T を推定した結果を表-5に示す。 K については、境界条件がわかっているため $K=0, 10000\text{Nm/rad}$ を単純支持、固定支持の両方についてそれぞれ計算した。単純支持の場合は $K=0$, 固定支持の場合は $K=10000\text{Nm/rad}$ を代入した結果の方が実験で用いた張力に近いことがわかる。図-4のグラフに用いた計算値は、ひずみゲージの値から計算された張力と丸棒の諸元から計算した EI を式(14),(15)に代入し繰り返し計算より求めている。この実験では、丸棒の単位長さ当りの重さに対して加速度センサーの重さが無視できない大きさであったため、式(14),(15)中の m にはセンサーの重さを無視した場合の値と考慮した場合の値の両方について計算した。加速度センサーの重さの考慮には、センサーの重さを全長で割り、丸棒の重さに加算した。

水平張力については、センサーの重さを考慮した場合の値の方が実験値に近い値となっている。したがって、本実験ではセンサーの重さの影響がかなりあるものと考えられる。一方、曲げ剛性の推定にはいずれの場合も良好な結果を得ることができなかった。これはセンサーの設置位置が各モードの腹付近にあればセンサーの重さが大きく影響し、節付近にあれば影響は小さいためと考えられる。センサーの設置位置は左端より30cmであるため、腹付近になると考えられる8,9

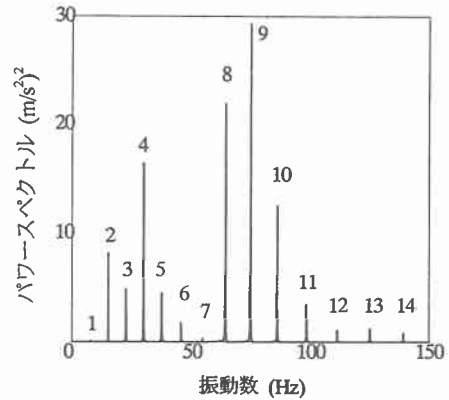


図-3 固有振動数のパワースペクトル
(両端固定支持, $T=1000\text{N}$)

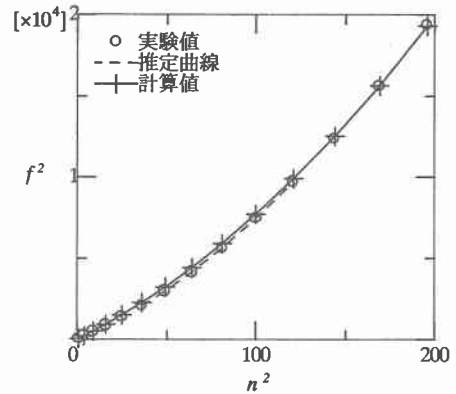


図-4 f^2 値の推定近似曲線
(両端固定支持, $T=1000\text{N}$)

表-4 固有振動数の実験結果

(単位: Hz)

境界条件		両端単純支持			両端固定支持		
水平張力		1039N	2489N	3940N	1000N	2450N	3930N
モード次数	$n=1$	6.96	10.74	13.55	7.69	11.41	14.22
	2	13.55	21.36	26.98	15.20	22.71	28.26
	3	20.02	31.25	39.37	22.58	33.45	41.56
	4	26.55	40.89	51.27	29.91	43.82	54.08
	5	33.45	51.09	64.03	37.41	54.38	67.02
	6	41.20	62.13	77.70	45.53	65.92	81.18
	7	49.74	74.28	92.41	54.62	78.37	96.31
	8	59.08	86.85	107.67	64.39	91.43	112.06
	9	69.03	100.10	123.54	75.01	105.22	128.48
	10	79.77	113.83	139.71	86.24	119.57	145.26
	11	91.25	128.11	156.43	98.45	134.52	162.66
	12	103.39	142.94	173.58	111.21	149.90	180.36
	13	116.27	158.20	191.28	124.94	166.08	198.79
	14	129.76	174.01	209.17	139.16	182.68	217.47

表一5 曲げ剛性と水平張力の推定結果

m (kg/m)	境界 条件	実験 張力 (N)	推定曲げ剛性(Nm ²)		推定張力(N)	
			K=0Nm/rad	K=10000Nm/rad	K=0Nm/rad	K=10000Nm/rad
センサー 無視	単純	1039	11.2	12.0	796	710
		2489	13.1	13.8	2028	1891
		3940	15.0	15.9	3249	3066
	固定	1000	12.9	12.1	978	881
		2450	14.5	14.5	2278	2129
		3930	16.9	16.9	3527	3330
センサー 考慮	単純	1039	13.4	12.5	891	795
		2489	15.5	14.6	2272	2118
		3940	17.8	16.9	3640	3434
	固定	1000	14.5	13.5	1096	986
		2450	16.2	15.3	2552	2385
		3930	19.0	18.0	3951	3730

次モードにおいて理論値との差が大きくなり、図一4のように曲率が大きくなり、EIの推定値が大きくなることが考えられる。実際のケーブル構造物では、ケーブルの重さに対してセンサーの重さは微小であるため、センサーの重さは無視することができ、このような差はでないと考えられる。

5. あとがき

本研究では、水平張力を受ける丸棒の曲げ剛性と張力、境界条件を求めることを目的とし、固有振動解析による数値計算、振動実験を行った。境界条件が未知であっても推定できるよう、運動方程式から回転ばね支持の境界条件によるモード次数と固有振動数の関係式を導いた。複数のモード次数と固有振動数に、最小二乗法を適用し曲げ剛性と張力、境界条件を求める計算手順を示した。本手法の妥当性を両端単純支持と両端固定支持の境界条件において、数値計算と振動実験にて検討した。数値計算の結果より、両端単純支持と両端固定支持において、ある程度良好な曲げ剛性と張力を推定することができた。振動実験においては、丸棒の重量に比較して、加速度センサーの重さの影響が大きいことから、今後改善する必要があるものと考えられる。

参考文献

- 1) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・西村春久：振動方によるケーブル張力の实用算定式について，土木学会論文報告集，第294号，pp.25-32，1980.2.
- 2) 島田忠幸：ケーブルの高次振動モードの固有振動数測定値からの張力推定法について，土木学会論文集，第501号/I-29，pp.163-171，1994.10.
- 3) 山口宏樹・宮田利雄・伊藤 学：曲げ剛性を考慮したケーブルの面内線形自由振動，土木学会論文報告集，第319号，pp.13-19，1982.3.
- 4) 島田忠幸・西村 昭：振動法によるケーブル張力測定値への曲げ剛性の影響，土木学会論文集，第398号，pp.314-318，1988.10.
- 5) 山極伊知郎・宇津野秀夫・遠藤浩司・杉井謙一：振動法によるケーブル曲げ剛性と張力の同時推定法，構造工学論文集，Vol.42A，pp.547-554，1996.3.
- 6) 頭井 洋・西川 徹・濱崎義弘・新家 徹：拡張カルマンフィルターによるケーブルの曲げ剛性と張力の同時推定に関する基礎的検討，土木学会論文集 No.556/I-38，pp.189-196，1997.1.
- 7) 山極伊知郎・宇津野秀夫・遠藤浩司・杉井謙一：振動伝達関数法によるケーブル張力と曲げ剛性の同時推定法，構造工学論文集，Vol.44A，pp.853-860，1998.3.