

I-81

テーパ付き薄肉I形断面桁の3次元固有振動解析

北海道大学大学院工学研究科	F 会員	林川 俊郎
北海道大学大学院工学研究科	○学生員	北島 勉
北海道大学大学院工学研究科	正 員	松井 義孝
北海道大学大学院工学研究科	F 会員	佐藤 浩一

1. まえがき

近年、橋梁構造物をはじめとする土木構造物はその構造形式が複雑化してきており、それに伴ってその動的応答も予測しにくいものとなってきている。構造物の動的応答に影響を与えるものとしては、構造物に作用する外力の性質と構造物に固有の振動特性がある。すなわち、動的応答特性を把握するためには固有振動数、固有振動モードを精度よく計算し、構造物の基本的な固有振動性状を調べるのが重要である。

薄肉断面を有する桁の固有振動解析については多くの研究が行われており、その解析方法として数値計算の一つである有限要素法が多くの研究で用いられている。Wekezer は、支間中央部に向かってフランジ幅や桁高が曲線的に増していく変断面I桁や、テーパの付いた片持ちはり (Gupta モデル) の基本的な固有値を求めている^{1),2)}。この解析では、変断面部材として解く方法と直線要素の集合体にモデル化して解く方法の比較を行っているが、ねじり振動モードで固有値の不一致が見られるものの、実用上は問題ないと結論づけている。筆者らは、平面および立体骨組構造物の固有値と固有振動モードを主に橋梁構造物について計算し、集中質量法、整合質量法、連続質量法の3通りの手法による解を比較することによりその精度について検討している^{3),4)}。その結果、集中質量法による固有円振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による固有円振動数は上界値を与えており、同じ要素分割数では整合質量法を用いた方が精度の良い解が得られることが示されている。また、要素分割数を増やすにつれて、離散座標系による近似解は徐々に厳密解に近づく傾向にある。同時に筆者らは、連続質量法における固有剛性マトリックスの各要素を固有円振動数 ω に関して Taylor 展開することにより、集中質量法、整合質量法および連続質量法の3種類の質量マトリックス法の位置関係について数学的に考察している⁵⁾。

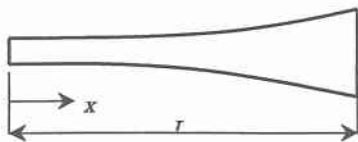
一般に変断面部材についての固有振動解析においては、これを分割し等断面要素の集合体にモデル化して固有振動解析を行う場合が多い。簡単な変断面構造では要素分割数をあまり多くしなくても、比較的正確なモデル化を行えるが、複雑な構造や変化の大きな構造になるとモデル化による誤差が大きくなり、要素分割数を多くとらなければならない。そこで、変断面部材を変断面要素の集合体にモデル化して剛性マトリックスや質量マトリックスを導くことができれば、少ない要素分割数で正確なモデル化を行うことができると考えられる。そこで本研究の目的として、変断面部材を変断面要素の集合体にモデル化した場合の剛性マトリックスおよび整合質量マトリックスを導き、これを用いた数値計算を行って、その有効性について検討するものである。

2. 解析方法2-1. 変断面部材のモデル化

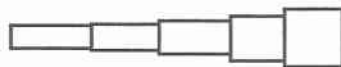
変断面構造の固有振動解析については、図-1のような変断面部材を図-2のような直線桁要素の集合体にモデル化して解析を行う場合が多いが、ここでは図-1のような変断面部材を図-3のように変断面要素の集合体にモデル化して剛性マトリックスや質量マトリックスを導く。変断面要素における断面諸元は以下の式(1)~(6)のように仮定する。ここで、添字の0は要素左端での断面諸元、 L は支間長、 ρ は密度を表す。また、それぞれの式の γ および α は断面諸元を式(1)~(6)のように表すためのパラメータである。

Natural Vibration Analysis of Three-Dimensional Thin-Walled Tapered I-Beams

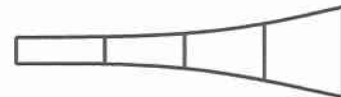
By Toshiro HAYASHIKAWA, Tsutomu KITAJIMA, Yoshitaka MATSUI and Koichi SATO



図一 1 変断面部材



図一 2 等断面要素へのモデル化



図一 3 変断面要素へのモデル化

$$A(x) = A_0 \left\{ 1 + \gamma_A \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_A} \right\} \cdots \cdots (1)$$

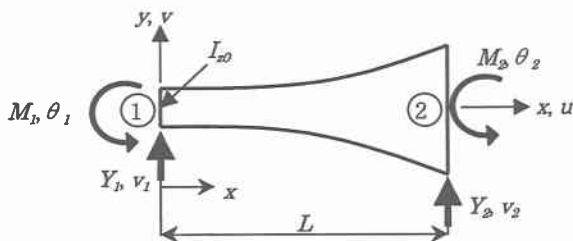
$$I_y(x) = I_{y0} \left\{ 1 + \gamma_y \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_y} \right\} \cdots \cdots (2)$$

$$I_z(x) = I_{z0} \left\{ 1 + \gamma_z \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_z} \right\} \cdots \cdots (3)$$

$$J(x) = J_0 \left\{ 1 + \gamma_J \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_J} \right\} \cdots \cdots (4)$$

$$Cw(x) = Cw_0 \left\{ 1 + \gamma_w \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_w} \right\} \cdots \cdots (5)$$

$$m(x) = \rho A(x) \cdots \cdots \cdots (6)$$



図一 4 変断面要素

ここで A は断面積、 I_y 、 I_z は y 軸、 z 軸回りの断面 2 次モーメント、 J は St.Venant の純ねじり定数、 Cw はそりねじり定数、 m は質量である。

2-2. 要素剛性マトリックス

振動モードの 1 つとして水平曲げ振動の剛性マトリックスを求める。図一 4 に示すような変断面要素における断面諸元として z 軸に関する断面 2 次モーメントを以下のように仮定する。ここで x 軸は部材軸方向、 y 軸、 z 軸は右手座標系をなす方向である。

$$I_z(x) = I_{z0} \left\{ 1 + \gamma_z \left(\frac{x}{L} \right)^{\alpha_z} \right\} \cdots \cdots \cdots (7)$$

ここで γ_z および α_z は z 軸に関する断面 2 次モーメントの変化を近似的に定義するパラメータである。水平方向変位および z 軸回りの回転角を式(8)のようにおけば両端の境界条件を代入することにより、それぞれの変位および回転角を含んだ式(9)が得られる。

$$\begin{aligned} v(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \cdots \cdots \cdots (8) \\ \theta(x) &= \frac{\partial v(x)}{\partial x} = 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned} \quad v(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)v_2 + f_3(x)\theta_2 + f_4(x)\theta_1 \cdots \cdots \cdots (9)$$

$$\text{ここに、} f_1(x) = 1 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2, f_2(x) = L\left\{\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}, f_3(x) = -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2, f_4(x) = L\left\{\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}$$

であり形状関数である。この要素のひずみエネルギーは以下になる。

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \cdots \cdots \cdots (10)$$

式(9)を式(10)に代入し、カスティリアノの定理を適用すると、剛性マトリックスの各要素が得られる。

$$k_{ij} = E \int_0^L I_z(x) f_i''(x) f_j''(x) dx \cdots \cdots \cdots (11)$$

1 例としてマトリックス内の要素 k_{11} は次のようになり、 $\gamma = 0$ とおくと直線桁要素にモデル化した場合のマトリックス要素の値と完全に一致することが分かる。

$$k_{11} = \frac{12EI_{z0}}{L_3} \left\{ 1 + 3\gamma_z \left(\frac{1}{\alpha_z + 1} - \frac{4}{\alpha_z + 2} + \frac{4}{\alpha_z + 3} \right) \right\} \cdots \cdots \cdots (12)$$

2-3. 要素整合質量マトリックス

整合質量マトリックスは剛性マトリックスを求める際に用いた同一の変位関数を用いて求める手法であることから、同様の形状関数 $f_i(x) \sim f_4(x)$ を用いると質量マトリックスの各要素は次のように求められる。

$$m_{ij} = \rho \int_0^L A(x) f_i(x) f_j(x) dx \cdots \cdots \cdots (13)$$

ここで、 ρ は桁要素の密度、 $A(x)$ は断面積である。

1 例としてマトリックス内の要素 m_{22} は次のようになり、 $\gamma = 0$ とおくと直線桁要素にモデル化した場合のマトリックス要素の値と一致している。

$$m_{22} = \frac{\rho A_0 L^3}{105} \left\{ 1 + 105\gamma_A \left(\frac{1}{\alpha_A + 3} - \frac{4}{\alpha_A + 4} + \frac{6}{\alpha_A + 5} - \frac{4}{\alpha_A + 6} + \frac{1}{\alpha_A + 7} \right) \right\} \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで、 A_0 は要素左端における断面積である。

要素剛性マトリックスおよび要素整合質量マトリックスの重ね合わせにより、構造全体の剛性マトリックスおよび整合質量マトリックスが得られれば、よく知られる式(15)より固有円振動数が得られる。

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \cdots \cdots \cdots (15)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{M}$ は整合質量マトリックス、 ω は固有円振動数である。

3. 数値計算結果

3-1. 片持ち梁の固有円振動数

図-5に示すような、ウェブ高さの変化するI形断面を有する片持ち桁（Gupta モデル）について、本研究で導いた変断面要素の剛性マトリックスおよび整合質量マトリックスを用いて固有振動解析を行い、固有円振動数の収束性状を調べた。

有限要素法における要素分割数は、

1、2、3、4、5、8、10 分割の 7 通りとしている。また、等断面要素を用いた場合（要素分割数は、2、3、4、5、8、10、20 分割の 7 通り）の固有円振動数を求め、変断面要素を用いた場合の結果と比較した。その結果を表-1 および表-2 に示す。表-1 および表-2 において振動モードの H、V、T はそれぞれ水平振動、鉛直振動、ねじり振動を表し、数字 1、2、3…はモード次数を表している。表-1 と表-2 を比較すると、水平振動および鉛直振動モードにおいては両表の値がほ

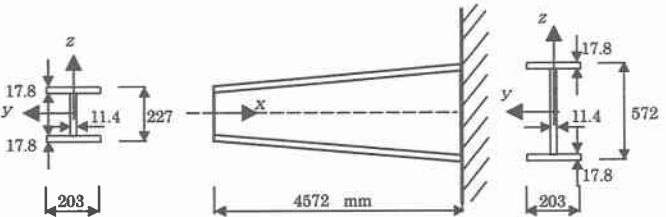


図-5 I 断面片持ち桁（Gupta モデル）

表-1 固有円振動数（変断面要素を用いた場合）(rad/sec)

振動モード	要素分割数					
	1 分割	2 分割	3 分割	4 分割	5 分割	10 分割
H1	38.46	42.63	42.62	42.61	42.62	42.62
T1	98.98	151.0	143.0	138.6	136.0	130.5
V1	127.9	191.6	191.6	191.6	191.6	191.6
H2	386.9	259.5	257.9	257.3	257.2	257.1
T2	972.6	476.4	468.9	458.7	451.9	440.8
H3	1780	873.9	722.1	717.9	714.9	712.7
T3	1862	966.7	955.3	954.2	954.0	953.8
V2	—	1303	1028	1012	996.3	972.0
H4	—	1928	1627	1414	1409	1395
T4	—	2611	1905	1832	1809	1740

ば一致し、変断面部材のモデル化による差はあまり認められなかった。また変断面要素の集合体にモデル化した場合の方が若干解の収束が早い傾向が認められる。これに対し、ねじり振動モードにおいては変断面要素を用いた場合の解が等断面要素を用いた場合の解よりもやや大きな値を与えており、また収束性とも等断面要素を用いた場合に比べてやや遅いことが認められる。

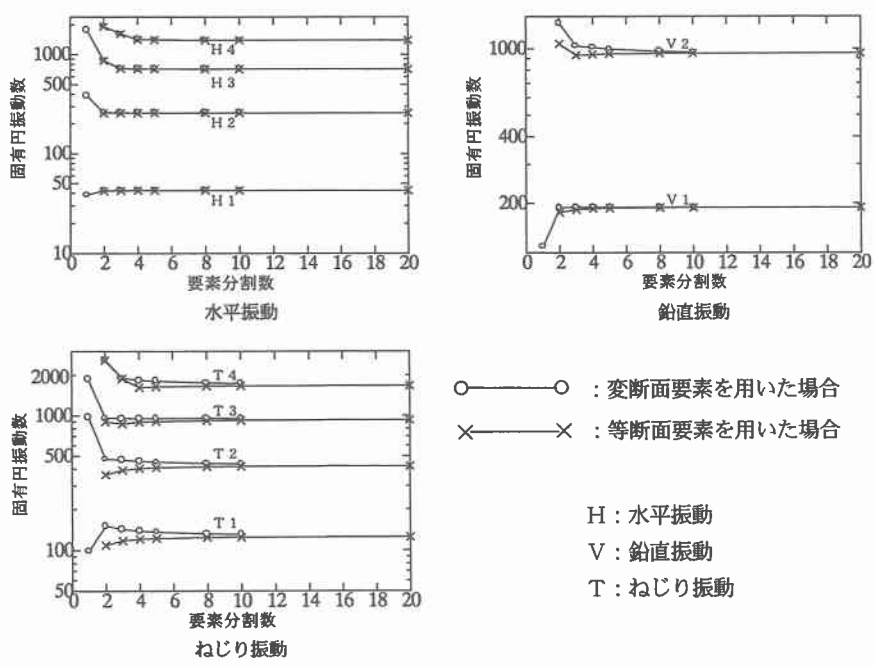
この性状をグラフ化したものを図一6に示す。図一6においても水平振動および鉛直振動では大きな差が認められないのに対し、ねじり振動ではほぼ収束した後の解が両モデル化において明確な誤差があり、T3 以外のねじり振動モードにおいて変断面要素を用いた場合の解が、等断面要素を用いた場合の解よりも収束がやや遅いことをグラフから確認できる。このことから水平振動および鉛直振動においては変断面要素を用いた解析方法が有効であると考えられるが、ねじり振動においては検討の余地があると思われる、今後の研究課題としたい。

3-2. テーバ形状と固有円振動数

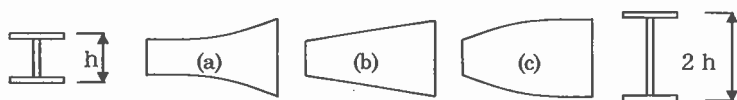
変断面部材の要素分割において等断面要素の集合体にモデル化する場合、変化の大きな場合や複雑な場合においてはモデル化による誤差が大きくなるため、本研究では変断面要素の集合体にモデル化した解析手法の精度について検討することを目的としている。そこでI 形断面を有する片持ち桁においてウェブ高さの形状、すなわちテーバ形状の異なる場合について変断面要素を用いた場合と等断面要素を用いた場合の固有

表一2 固有円振動数（等断面要素を用いた場合）（rad/sec）

振動モード	要素分割数						
	2 分割	3 分割	4 分割	5 分割	8 分割	10 分割	20 分割
H1	41.99	42.34	42.47	42.54	42.59	42.61	42.63
T1	109.1	117.3	120.5	122.1	123.6	124.2	124.8
V1	182.2	187.3	189.2	190.1	191.0	191.2	191.5
H2	256.4	256.3	256.5	256.7	256.9	257.0	257.2
T2	362.5	391.8	403.0	408.9	414.9	417.6	419.8
H3	867.0	718.0	715.6	713.4	712.2	712.4	712.6
T3	900.7	868.8	895.4	905.4	917.0	922.4	927.8
V2	1053	933.5	941.9	945.5	950.3	951.9	953.3
H4	1913	1622	1410	1406	1394	1393	1392
T4	2586	1884	1624	1648	1658	1667	1675



図一6 固有円振動数の収束 (rad/sec)



図一七 ウェブ高さの形状

値がどのように変化するかを調べ、等断面要素を用いた場合のモデル化による誤差の程度について検討した。I 形断面におけるテーパ形状は図一七に示すような3通りとし、有限要素法における分割数はそれぞれ4、6、8、10分割の4通りとした。図一七において(a)は内側に凸な2次放物線状にウェブ高さが変化、(b)は直線上にウェブ高さが変化、(c)は外側に凸な2次放物線状にウェブ高さが変化する片持ち桁であり、それぞれ左端が自由端、右端が固定端である。また断面形状はフランジ幅およびウェブ高さが1.0m、フランジ厚およびウェブ厚が1.0cm、桁長が20mである。変断面要素を用いた場合、等断面要素を用いた場合の固有振動数の値をそれぞれ表一三、表一四に示す。表一三および表一四においてHは水平振動モード、Vは鉛直振動モード、Tはねじり振動モードである。両表を比較すると、水平振動においては変断面要素、等断面要素を用いた場合で差はあまり見られないものの、変断面要素を用いた場合の方がすべての桁形状において若干収束が早いことが認められる。鉛直振動においては変断面要素、等断面要素を用いた場合の収束性やや差が認められる。変断面要素を用いた

た場合にはすべての桁形状において4分割でほぼ収束が終了しているのに対し、等断面要素を用いた場合には10分割においても収束が終了していないことが認められる。鉛直振動はウェブ高さのモデル化の影響が顕著に現れる振動モードであるが、固有振動解析に変断面要素を用いることによって少ない要素分割数で正確なモデル化を行い、精度の良い固有値が得られると考えられる。ねじり振動においては前節と同様に変断面要素、等断面要素を用いた場合で収束の早さについてはさほど違いは認められず、また変断面要素を用いた場合の解が等断面要素を用いた場合の解よりも大きな値を示していることが分かる。またこの傾向を明確にするために両表の値をグラフ化したものを図一八に示す。図一八からも水平振動や鉛直振動が変断面要素を用いた場合の結果が比較的正確にモデル化できているのに比べて、ねじり振動においては変断面要素と等断面要素とのモデル化による差が大きくなっていることが確認できる。また、鉛直振動およびねじり振動において、実線と破線とを比較した場合、形状(a)、形状(b)、形状(c)となるにつれて両者の差が大きくなる傾向にある。このことから形状(c)の

表一三 変断面要素を用いた場合の固有円振動数 (rad/sec)

形状	モード 次数	要素分割数			
		4分割	6分割	8分割	10分割
(a)	H1	10.51	10.51	10.51	10.51
	T1	17.25	17.17	17.12	17.08
	V1	33.34	33.35	33.35	33.35
	H2	64.25	64.19	64.18	64.17
	T2	81.90	80.68	80.07	79.67
(b)	H1	10.29	10.29	10.29	10.29
	T1	17.69	17.36	17.18	17.06
	V1	36.36	36.36	36.36	36.36
	H2	62.57	62.50	62.49	62.49
	T2	83.01	81.63	80.90	80.42
(c)	H1	10.08	10.08	10.08	10.08
	T1	17.77	17.21	16.93	16.76
	V1	38.96	38.96	38.95	38.95
	H2	61.00	60.96	60.95	60.95
	T2	84.03	82.44	81.56	81.01

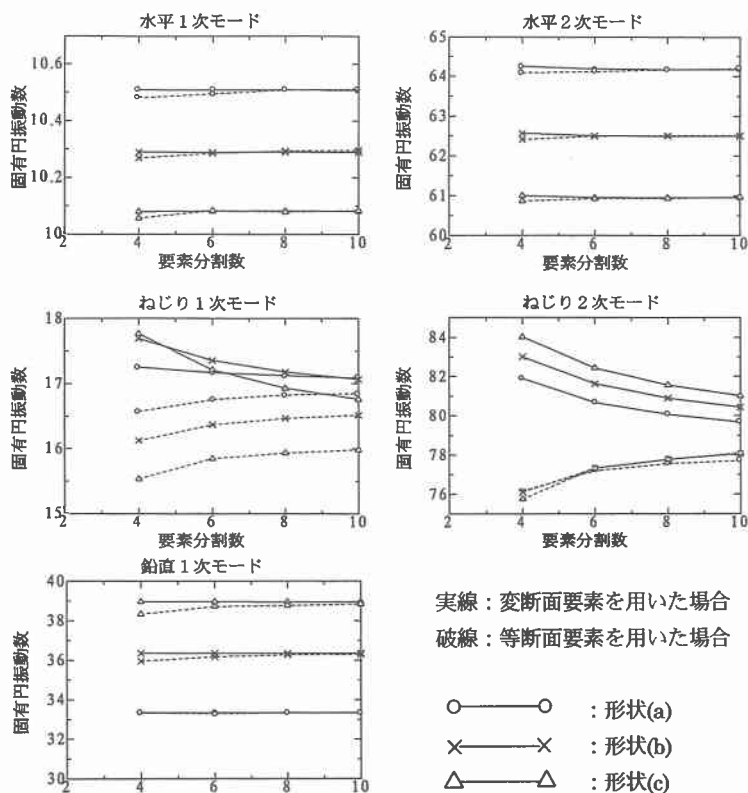
表一四 等断面要素を用いた場合の固有円振動数 (rad/sec)

形状	モード 次数	要素分割数			
		4分割	6分割	8分割	10分割
(a)	H1	10.48	10.49	10.51	10.51
	T1	16.57	16.76	16.83	16.85
	V1	33.33	33.29	33.33	33.34
	H2	64.09	64.12	64.17	64.20
	T2	76.18	77.19	77.56	77.71
(b)	H1	10.27	10.28	10.29	10.30
	T1	16.13	16.37	16.47	16.52
	V1	35.96	36.18	36.28	36.31
	H2	62.41	62.49	62.51	62.51
	T2	76.11	77.32	77.77	78.06
(c)	H1	10.06	10.08	10.08	10.08
	T1	15.54	15.85	15.94	15.98
	V1	38.33	38.72	38.77	38.85
	H2	60.87	60.93	60.93	60.97
	T2	75.76	77.33	77.78	78.10

ようなモデルの解析においては変断面要素を用いた解析が有効であり、等断面要素を用いる場合には十分な要素分割数をとらなければ精度の良い解が得られないと考えられる。

4. あとがき

本研究では変断面部材を変断面要素の集合体にモデル化した場合の剛性マトリックスおよび整合質量マトリックスを導き、これを用いた数値計算を行って、その有効性について検討した。Guptaモデルについて数値計算を行った結果、水平振動モード、鉛直振動モードにおいては変断面要素、等断面要素を用いた場合ともさほど



図—8 モデル化による固有円振動数の差 (rad/sec)

固有値に大きな差違は認められず、また変断面要素を用いた解析で若干収束が早い傾向が認められた。これに対し、ねじり振動モードにおいては変断面要素を用いた解析で収束が遅い場合があり、またその固有値の値も等断面要素の場合に比べて大きな差違があった。このことについては検討の余地があると思われ、今後の研究課題としたい。桁の形状を変化させたときの固有値のモデル化による差違を調べた結果、桁の形状が形状(c)のような場合において変断面部材のモデル化による差違が大きいことが認められた。このことから、このようなモデルにおいては変断面要素を用いた解析が有効であり、少ない要素分割数で精度の良い解が得られると考えられ、等断面要素を用いた解析では十分な要素分割数が必要であると考えられる。

<参考文献>

- 1) Wekezer, J.W. : Free Vibrations of Thin-Walled Bars with Open Cross Sections, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.113, No.10, pp.1441-1453, October, 1987.
- 2) Wekezer, J.W. : Vibrational Analysis of Thin-Walled Bars with Open Cross Sections, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.115, No.12, pp.2965-2978, December, 1989.
- 3) 林川俊郎・佐藤康治・角田典史雄：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度，北海道大学工学研究報告，第 148 号，pp.1-15，1989 年 10 月．
- 4) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Steel Bridges of Arch-Structural Systems, Proc. of EASEC-3, pp.963-968, April, 1991.
- 5) 林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一：薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究，応用力学論文集，Vol.1, pp.303-310，1998 年 10 月．