

I-79

MATLAB による複素固有値解析に基づいた歩道橋の振動特性に関する一考察

北海道大学大学院工学研究科 正 員 小幡 卓司
 北海道大学大学院工学研究科○学 生 員 水草 浩一
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 林川 俊郎
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 佐藤 浩一

1. ま え が き

昨今の建設技術の向上によって、橋梁構造物においては長大化あるいはスレンダー化が進みつつある。このため、設計時における耐震性、耐風性等の十分な検討は従来にも増して重要な項目となり、対象となる構造物の動的な挙動の把握は不可欠な要素となってきた¹⁾。

応答スペクトル法や時刻歴応答解析等を用いて構造物の動的特性を求める場合、その対象となる構造物の固有振動数、固有振動モードおよび減衰定数等が問題となる。近年においては、固有振動数や固有振動モードについては解析により求められた結果と実橋振動実験から得られた数値との整合性が比較的高いことが知られているが、動的応答量に関しては、計算値と実測値が一致しない場合がしばしば見受けられる。この主な原因として、減衰定数の理論的、定量的推定が非常に困難であることが挙げられる。一般に橋梁の減衰評価は、そのメカニズムの多様さや複雑さから力学的考察が十分に行われているとは言いがたく、通常の設計においては類似橋梁の振動実験結果等から経験的に減衰定数を仮定する場合が大半である。最近においては、著者らの知る限りでは減衰をエネルギー的に評価することを試みた山口らの研究^{2),3)}や、桁橋の複素固有値解析結果に基づいて支承やコンクリート床版と鋼桁との摩擦力等の減衰特性への影響を検討した中島らの研究⁴⁾等が知られているが、設計段階において力学的に適切な減衰評価を行うには、依然として非常に困難が伴うものと思われる。

一方、コンピュータあるいは計算技術のめざましい進歩により、従来では困難であった様々な解析もパソコン程度で比較的容易に行える傾向にある。特に MATLAB⁵⁾に代表されるような解析・設計支援 CAD ソフトウェアにおいては、時刻歴応答解析や複素固有値解析等の複雑なアルゴリズムがコマンドとして用意されており、プログラムにそれら必要なコマンドを組み込むことで各種の解析が簡便に行えるようになってきた。

以上を踏まえて、本研究では橋梁構造物の固有振動数、固有振動モードならびに構造減衰を同時に把握するための基礎的検討を試みることを目的として、MATLAB を用いた複素固有振動解析を行った。上述のように、減衰のメカニズムは極めて複雑な要因から構成されることが知られている。そこで本研究においては、構造が比較的単純で減衰のエネルギー損失が主に主桁の応答によって成され则认为えられる横断歩道橋を実験ならびに解析対象とすることとした。具体的には、札幌市内の計 8 橋の横断歩道橋を対象として、まず鉛直 1 次の固有振動数ならびに減衰定数を人力加振による減衰自由振動データより算定した。次に、部材の減衰定数を仮定して各歩道橋の質量、剛性に基づき粘性減衰マトリックスを作成し、MATLAB による複素固有振動解析プログラムを用いて各モードの固有振動数、減衰定数等を求め、解析結果と実験結果の比較を行うことにより、各歩道橋の主桁における適切な粘性減衰を推定することを試みた。さらに得られた主桁の粘性減衰より、横断歩道橋の減衰特性に関する傾向について考察を加えたのでここに報告する。

2. 解 析 手 法

一般に、減衰を考慮した 1 自由度系の減衰振動の運動方程式は、以下のように示される⁶⁾。

$$\ddot{u} + 2h\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \cdots \cdots \cdots (1)$$

Consideration of Dynamic Characteristics on Pedestrian Bridges Based on Complex Eigenvalue Analysis by Using of MATLAB
 by Takashi Obata, Koichi Mizukusa, Toshiro Hayashikawa and Koichi Sato.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad h = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 m, c, k はそれぞれ構造物の質量、粘性減衰定数、剛性であり、 ω は非減衰固有円振動数、 h は減衰係数を表している。式 (1) の解が $u = Ce^{\lambda t}$ と仮定して代入すると、特定方程式及びその根は次のようになる。

$$\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda_{1,2} = -h\omega \pm \omega\sqrt{h^2 - 1} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \dots\dots\dots (4)$$

減衰と振動を考慮すると、 $0 < h < 1$ でなくてはならないから、この式(4)は以下の式(5)のような共役な複素数となり、その場合の固有円振動数 ω_d は式(6)のようになる。

$$\lambda_{1,2} = -h\omega \pm i\omega\sqrt{1 - h^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - h^2} \dots\dots\dots (6)$$

本研究においては、式(2)における h を仮定することにより構造物の粘性減衰 c を求めることとした。

次に、MATLAB を用いて複素固有値解析を行う場合には状態空間表示された多自由度系の構造物システムが必要となる。式(7)のような多自由度系の運動方程式に対し、式(8)のような恒等式を導入するとして、両式を連立させると式(9)が得られる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{I}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ は質量マトリックスおよび剛性マトリックス、 $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ は変位とその1回、2回微分である。式(9)は、 $\dot{\mathbf{u}} = \lambda \mathbf{C}e^{\lambda t} = \lambda \mathbf{u}$ 、 $\ddot{\mathbf{u}} = \lambda^2 \mathbf{C}e^{\lambda t} = \lambda^2 \dot{\mathbf{u}}$ より、以下のように変形される。

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)は左辺を書き換えると以下のような標準固有値問題として表現できる。

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ はシステムマトリックスである。MATLAB による解析方法は、このシステムマトリックスを式(12)から求めた後、まず ss コマンドを用いて構造物システムの状態空間表示を行う。次に得られた構造物システムに対して damp コマンドを適用して所定の解を得るものである。表-1 に本研究で用いた主なコマンドを示す。

表-1 コマンド一覧表

コマンド	機能
ss	システムの状態空間表示
eig	固有値問題の解法
damp	複素固有値解析
plot	図形の描画

3. 実橋振動実験

前述のとおり、本研究では、解析対象の固有振動数ならびに減衰定数を測定するため、札幌市内において現在供用中である、支間長およそ 15～30m、幅員 1.5m の標準的な横断歩道橋 8 橋に対して、人力加振による減衰自由振動実験を実施した。こ

れら各歩道橋の諸元は表-2に示すとおりである。

測定方法としては、歩道橋の支間を 6 分割して 1/6 点～5/6 点の各点に加速度ピックアップを設置し、動ひずみ計および A/D 変換ボードを介して加速度応答値を直接パソコンに記録した。なおサンプリング周波数は 200Hz を用いている。加振方法は 1 次の振動モード形状を考慮して、支間中央点にて人間 1 名が跳躍することによって歩道橋を加振した。固有振動数ならびに減衰定数の把握には、前者に関しては測定データに対して FFT 解析を行うことによりこれを求め、後者については実験波形から直接算出する方法を採用することとした。これらの結果を表-3 に示す。

表-2 歩道橋一覧表

	支間長 (m)	主桁断面形状 (mm)		床版形式・備考
		フランジ	ウェブ	
A 歩道橋	15.5	200×12	576×9	R C 床版
B 歩道橋	15.8	200×12	576×9	R C 床版
C 歩道橋	20.8	200×16	768×9	鋼床版・縦リブに角パイプ使用
D 歩道橋	21.9	200×16	768×9	R C 床版・コンクリート舗装
E 歩道橋	22.6	200×16	768×9	鋼床版・縦リブに角パイプ使用
F 歩道橋	23.6	200×16	968×9	R C 床版
G 歩道橋	29.3	250×16	768×9	鋼床版
H 歩道橋	30.4	200×16	968×9	鋼床版・単純桁 3 連

表-3 実験結果一覧表

	支間長 (m)	固有振動数 (Hz)		減衰定数 (1st mode)
		1 次	2 次	
A 歩道橋	15.5	5.52	16.50	1.438%
B 歩道橋	15.8	5.42	15.33	1.643%
C 歩道橋	20.8	4.04	13.53	1.332%
D 歩道橋	21.9	3.37	10.84	1.173%
E 歩道橋	22.6	4.05	13.04	1.237%
F 歩道橋	23.6	3.95	13.04	1.177%
G 歩道橋	29.3	2.44	8.55	1.494%
H 歩道橋	30.4	2.93	10.35	1.258%



図-1 解析モデル

4. 解析結果ならびにその考察

一般に、固有振動解析においては高欄等の付属物の剛性が計算結果に影響を及ぼすことが知られている。本研究では、このような付属物による影響を極力排除するため、文献 7 の剛性評価方法を参考にして解析に用いる主桁剛性を算出することとした。また、解析モデルについては、図-1 に示すような床版を仮想トラス部材とした 3 次元骨組構造モデルを用いている。この仮想トラス部材とは、床版の曲げ剛性は主桁に加味されているが、水平方向およびねじりに関する剛性は考慮されていないため、床版のせん断変形を考慮してその変形量が等価になるような断面積を有し、また質量は持たない部材を付加したものである。なお、質量マトリックスには整合質量法を、減衰マトリックスは、前述のとおり部材の減衰定数 h を仮定して式(2)に基づいて構造物の粘性減衰 c を求めている。解析結果の一例として、図-2 に G 橋における振動モード図を、表-4 に実測値と解析値の比較を示す。

表 4 から、まず固有振動数に関しては、実験値と解析値が極めてよく一致していることがわかる。また、1 次モードの減衰定数については、その誤差が最大でもおよそ 2% 程度であり、本研究における解析結果は実橋における減衰特性を比較的良好に推定しているものと判断できる。したがって、本解析で用いた主桁剛性と式(2)に基づいて設定した粘性減衰

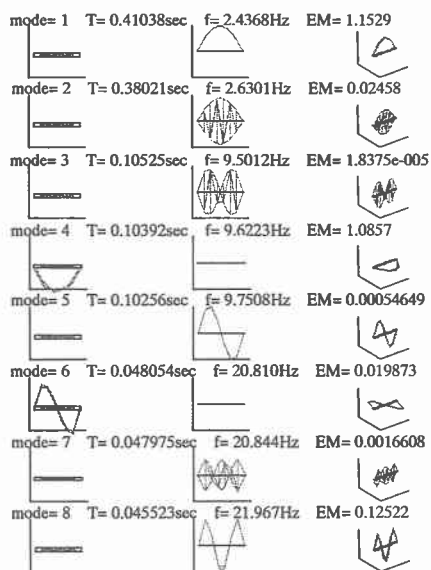


図-2 振動モード図

はほぼ妥当であると考
えられる。

次に、図-3 は主桁の
粘性減衰定数と支間長
の関係を、図化したも
のである。図-3 におい
て、30m程度の歩道橋
で逆転現象が生じてい
るものの、支間長の増

大に応じて粘性減衰が減少する、従来の傾向があ
る程度認められるものと思われる。上記の逆転現
象が生じた理由としては、G 歩道橋では鋼床版に
標準設計で用いられる平リブではなく、一般橋梁
と同様な U リブが用いられているため、床版の影
響がかなり大きいものと推定される。また、H 歩
道橋は交差道路の関係から歩道橋 3 連からなる複
雑な形状を有しており、実験時においてもある径
間を加振すると、橋脚を介して他の径間も振動す
る現象が確認されていることから、主桁の粘性減
衰がやや大きめに算定されたものであろう。さら
に、支間長の差による減衰定数への影響を減じ
るために、横軸のパラメータに歩道橋の支間長と
1 次モード減衰定数を乗じたものを用いてその傾
向を検討することとした。図-4 にその結果を示す。
図-4 から、主桁の粘性減衰定数はほぼ 0.01ts/m 程
度に収束し、一般的な横断歩道橋では 0.01ts/m 程
度の粘性減衰を仮定すれば解析によってある程度
正確な減衰特性が予測でき得るものと思われる。

以上より、MATLAB を用いた複素固有値解析
を行うことにより比較的高い精度で歩道橋の固有
振動数、固有振動モード、構造減衰を同時に評価出来るものと推定され、設計時における動的特性の
検討に適用できる十分な可能性を有するものと考えられる。

5. あ と が き

本研究は橋梁構造物の固有振動数、固有振動モードならびに構造減衰を同時に把握するための基礎
的検討を試みることを目的として、構造の比較的単純な横断歩道橋を対象として MATLAB を用いた複
素固有振動解析を行ったものである。解析結果と実験結果の比較からは、固有振動数減衰定数とも同
時に比較的良好一致し、一般的な横断歩道橋においてはある程度正確な減衰特性が予測でき得るもの
と思われる結果が得られた。したがって、本研究における解析手法は部材の減衰性能を評価すること
により、設計時における動的特性の検討に適用できる十分な可能性を有するものと考えられる。

表-4 解析結果比較表

	支間長 (m)	固有振動数 (1 次)		減衰定数 (1 次)		主桁粘性定数 (t/s/m)
		実験値	解析値	実験値	解析値	
A 歩道橋	15.5	5.52Hz	5.523Hz	1.438%	1.414%	0.0258
B 歩道橋	15.8	5.42 Hz	5.371Hz	1.643%	1.622%	0.0221
C 歩道橋	20.8	4.05 Hz	4.051Hz	1.332%	1.344%	0.0115
D 歩道橋	21.9	3.37 Hz	3.363Hz	1.173%	1.157%	0.0112
E 歩道橋	22.6	4.04 Hz	4.043Hz	1.237%	1.219%	0.0078
F 歩道橋	23.6	3.95 Hz	3.958Hz	1.177%	1.179%	0.0092
G 歩道橋	29.3	2.44 Hz	2.437Hz	1.494%	1.497%	0.0132
H 歩道橋	30.4	2.93 Hz	2.921Hz	1.258%	1.273%	0.0145

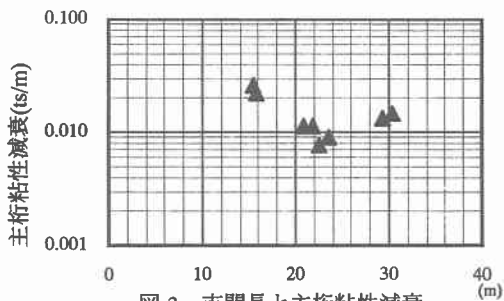


図-3 支間長と主桁粘性減衰

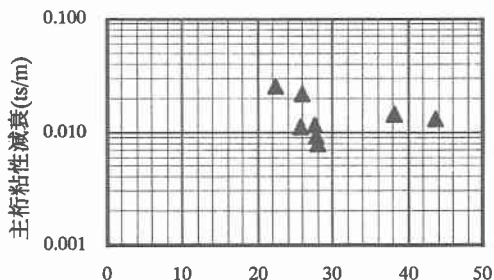


図-4 支間長・モード減衰と主桁粘性減衰

【参考文献】1)山口宏樹：橋梁の減衰評価—斜張橋減衰のエネルギーの評価を例として—，橋梁振動コロキウム'97 論文集，pp.55-62，1997。2)山口宏樹，高野晴夫，小笠原政文，下里哲弘，加藤真志，岡田淳：鶴見つばさ橋の振動実験による動的特性の同定，土木学会論文集，No.543/I-36，pp.247-258，1996。3)山口宏樹，高野晴夫，小笠原政文，下里哲弘，加藤真志，加藤久人：斜張橋振動減衰のエネルギー的評価方法と鶴見つばさ橋への応用，土木学会論文集，No.543/I-36，pp.217-227，1996。4)中島章典，土岐浩之：剛体ばねモデル解析を用いた桁橋の構造減衰特性に関する基礎的研究，構造工学論文集，Vol.44A，pp.793-800，1998。5)小幡卓司，玉垣達也，林川俊郎，佐藤浩一，文英治：MATLAB による複素固有値解析に基づいた歩道橋の振動特性について，土木学会第 53 回年次学術講演会講演概要集，第 1 部(B)-B459，pp.918-919，1998。6)大崎順彦：新・地震道のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994。7)小幡卓司，伊藤公彦，林川俊郎，佐藤浩一，亀井与志：歩道橋の動的応答と歩行外力の同定に関する一考察，鋼構造年次論文報告集，第 4 巻，pp.447-454，1996。