

I-77

応力を変数とする逆解析手法を用いた桁剛性の同定

北海道大学大学院工学研究科 正 員 平沢秀之
 北海道大学工学部 ○学生員 関口修史
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 林川俊郎
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 佐藤浩一

1. はじめに

一般に原因から結果を求めようとするのが順解析で、結果から原因を推定しようとするのが逆解析である。構造工学の分野においては、構造物にある外力が与えられ(原因)、それによる応答が得られた(結果)とすると、この結果から原因を推定する解析が逆解析であると定義することができる¹⁾。この場合、外力の他に構造物の材料定数、境界条件、応力とひずみ(あるいは力と変位)の支配方程式も原因に含まれ、実験や測定によって得られたひずみや変位、反力等の数値データが結果に含まれる。結果から原因を推定する方法としては、出力誤差法、最小分散推定法が代表的である。前者は観測データと計算値の差の平方和を評価関数として、その関数値を最小にするような推定パラメータを決定する方法である。後者は推定パラメータを確率ベクトルと見なし、推定誤差の最小分散推定値を与えるベイズ推定法や、カルマンフィルタ法等のアルゴリズムを用いる手法であり、この方法を応用した、斜張橋のケーブル張力や曲げ剛性の同定²⁾、不完全合成桁の合成度の同定³⁾等の研究例も見られる。

本研究はこれらの逆解析手法のうち、比較的定式化の容易な出力誤差法を応用して鋼桁の剛性を同定しようとするものである。桁剛性は通常断面寸法とヤング係数等が与えられれば決まる値であるが、ここでは設計への応用を念頭に置いて、観測値に鋼材の許容応力度を用いることとし、この観測値を用いた評価関数から逆に桁剛性を求めることを試みる。そのために応力を変数とする評価関数の設定及び未知変数同定のための定式化を行っている。また解の探索にはニュートンラプソン法と共役勾配法を使用し、両手法の収束性の比較検討も行っている。

2. 解析方法

2.1 ニュートンラプソン法による定式化

鋼桁の曲げ剛性 EI を同定するために評価関数 $S(\{x_c\})$ を定義し、 $S(\{x_c\})$ を最小にする $\{x_c\}$ を決定する最適化法としてニュートンラプソン法を適用する。観測点数を n 、観測点 i での観測応力を $\{\sigma_i^*\}$ 、計算により得られた応力を $\{\sigma_i\}$ とし、同定しようとする未知変数(剛性)を $\{x_c\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{EI_1, EI_2, \dots, EI_m\}$ とすると評価関数 $S(\{x_c\})$ は以下のように表わされる。

$$S(\{x_c\}) = \sum_{i=1}^n w_i (\{\sigma_i^*\} - \{\sigma_i\})^2 \quad (1)$$

ここで w_i は重みを表わし、本研究では $w_i = 1/\{\sigma_i^*\}^2$ とおく。

式(1)を最小にする $\{x_c\}$ が求める最適値である。そこで式(1)を未知変数 $\{x_c\}$ で偏微分し0とおくと以下ようになる。

$$\frac{\partial S}{\partial x_c} = 2 \sum_{i=1}^n w_i (\{\sigma_i^*\} - [K]^{-1} [F_i]) \left[[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_c} [K]^{-1} \{F_i\} \right] = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\{F_i\}$ は外力ベクトル、 $[K]$ は要素剛性マトリクス $[K_{ei}]$ を構造全体について重ねあわせたものである。また、 $[K_{ei}]$ 、 $[K'_{ei}]$ はそれぞれ次式で表わされる。

Identification of rigidities of steel girders by inverse analysis including variables of stresses
 by Hideyuki HIRASAWA, Shuji SEKIGUCHI, Toshiro HAYASHIKAWA and Koichi SATO.

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} 12EI_i/l^3 & 6EI_i/l^2 & -12EI_i/l^3 & 6EI_i/l^2 \\ 6EI_i/l^2 & 4EI_i/l & -6EI_i/l^2 & 2EI_i/l \\ -12EI_i/l^3 & -6EI_i/l^2 & 12EI_i/l^3 & -6EI_i/l^2 \\ 6EI_i/l^2 & 2EI_i/l & -6EI_i/l^2 & 4EI_i/l \end{bmatrix}, [K'_{ei}] = Ey \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix} \quad (3a, b)$$

式(3a, b)中の EI_i, l はそれぞれ部材 i の曲げ剛性, 部材長であり, y は桁高の $1/2$ である。

式(2)は未知剛性の数だけ存在し, m 本の非線形連立方程式となる。これら m 本の連立方程式を解くために, 式(2)を更に未知変数で偏微分すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial x_\zeta} \right) = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left[\left(\{\sigma_i\} - [K'_{ei}][K]^{-1}\{F_i\} \right) \left(-[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\xi} [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} - [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\xi} [K]^{-1} \right) \{F_i\} \right. \\ \left. + \left([K'_{ei}][K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\xi} [K]^{-1}\{F_i\} \right) \left([K'_{ei}][K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1}\{F_i\} \right) \right] \quad (4)$$

ここで, $\zeta=1, 2, \dots, m$, $\xi=1, 2, \dots, m$ である。ニュートンラプソン法による未知変数同定のための反復計算式は式(2), (4)を用いた次式となる。

$$x_{\zeta k+1} = x_{\zeta k} + D_{\zeta k} / Y_k \quad (5)$$

ここで, $Y_k, D_{\zeta k}$ は次のように表わされる。

$$Y_k = \begin{bmatrix} \partial^2 S / \partial x_1^2 & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_m \\ \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 S / \partial x_2^2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 S / \partial x_m \partial x_1 & \partial^2 S / \partial x_m \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_m^2 \end{bmatrix}, D_{\zeta k} = \begin{bmatrix} \partial^2 S / \partial x_1^2 & \dots & -\partial S / \partial x_1 & \dots & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_m \\ \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_1 & \dots & -\partial S / \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 S / \partial x_m \partial x_1 & \dots & -\partial S / \partial x_m & \dots & \partial^2 S / \partial x_m^2 \end{bmatrix}$$

2.2 共役勾配法による定式化⁴⁾

評価関数はニュートンラプソン法の場合と同様に式(1)を用いる。ここで, $S(\{x_\zeta\})$ は解の近傍で 2 次関数に近似できるものとし, A を m 次の正方マトリクス, b を m 行の列ベクトルとおいて次式で表わすことができると仮定する。

$$S(\{x_\zeta\}) = \frac{1}{2} (x, Ax) - (x, b) \quad (6)$$

ここで共役勾配法を逐次近似法として考慮し, 第 k 回目の近似解を x_k として, これに Δx_k の修正量を加えて第 $k+1$ 近似解を求めるとすると, $x_{k+1}, \Delta x_k$ は式(7a, b)のように与えられる。

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \Delta x_k = \alpha_k p_k \quad (7a, b)$$

ここで α_k, p_k はそれぞれ修正量, 修正方向ベクトルで, これらは以下のようにして決定される。

まず α_k の決定に際しては, n 次元空間における直線上で最適値を求める問題と考えることができ, $f(x_k + \alpha_k p_k)$ を α_k の関数として微分した式(8)を 0 とおいた方程式を解けばよい。

$$\frac{df}{d\alpha_k} = p_k^T A x_k + \alpha_k p_k^T A p_k - p_k^T b = \alpha_k p_k^T A p_k - p_k^T (b - A x_k) \\ = \alpha_k p_k^T A p_k - p_k^T r_k \quad (\because r_k = b - A x_k) \quad (8)$$

式(8)=0 より α_k は次のように与えられる。

$$\alpha_k = \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k} = \frac{(p_k, r_k)}{(p_k, A p_k)} \quad (9)$$

次に p_k を決定する。まず誤差ベクトル s_k を $s_k = A^{-1} b - x_{k-1}$ と与えると

$$(s_{k+1}, A p_k) = (A s_{k+1}, p_k) = (r_{k+1}, p_k) = 0 \quad (10)$$

である。すなわち、この s_{k+1} は Ap_k と直角な方向にある。次に、 x_0 と p_0 を任意にとり、式(7)、(8)から x_1 を導くと、解は Ap_0 と直角な方向にあるから、 x_1 が Ap_0 と直交する部分空間に「 p_1 の候補ベクトル」としての r_1 から Ap_0 成分を除去して以下のように p_1 を導く。

$$p_1 = r_1 - \frac{(r_1, Ap_0)}{(p_0, Ap_0)} p_0 \quad (11)$$

同様に p_2 は、ベクトル r_2 から不要成分を除去して、

$$p_2 = r_2 - \frac{(r_2, Ap_1)}{(p_1, Ap_1)} p_1 - \frac{(r_2, Ap_0)}{(p_0, Ap_0)} p_0 \quad (12)$$

以下同様に式(12)を一般化して、式(13)が得られる。ここで、 $(r_{k+1}, Ap_0) = 0$ を考慮した。

$$p_{k+1} = r_{k+1} - \frac{(r_{k+1}, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)} p_k \quad (13)$$

式(7)に式(9)、(13)を代入して、反復計算式は式(14)のように得られる。

$$x_{k+1} = x_k + \frac{(p_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)} \left\{ r_k - \frac{(r_k, Ap_{k-1})}{(p_{k-1}, Ap_{k-1})} p_{k-1} \right\} \quad (14)$$

3. 数値計算例

3.1 先端に集中荷重を受ける片持ち梁

図-1 のような片持ち梁の曲げ剛性 EI を同定する。断面は①～④の4種類の変断面とし、梁の先端には $P=3.0\text{kN}$ の鉛直荷重を載荷する。未知剛性は EI_1 から EI_4 の4個である。同定計算に当たっては、まず表-1 のような曲げ剛性をあらかじめ仮定し、順解析によって各節点における応力 σ_i を計算する。次にこの応力を模擬観測データ σ_i^* として与え、逆解析を行い最初に仮定した曲げ剛性に正しく収束するか検討する。ニュートンラプソン法を用いた同定結果を図-2(a)に、共役勾配法を用いた同定結果を図-2(b)に示す。

図-2(a)、(b)は両手法での収束状況を示し、表-1には収束結果を付け加える。図-2から未知剛性はある一定の値に収束していくことがわかる。表-1を検討すると、有効数字6桁まで仮定した EI と完全に一致している。すなわち、ニュートンラプソン法も共役勾配法も逆解析手法として有効な手段であると言え、また両手法の収束状況を比較すると、ニュートンラプソン法がほぼ30回であるのに対し、共役勾配法は4回で収束しており、共役勾配法の方が非常に速く収束していることが分かる。

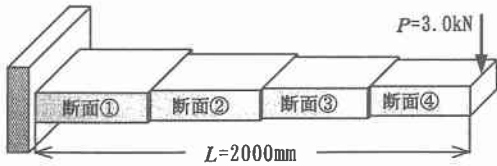


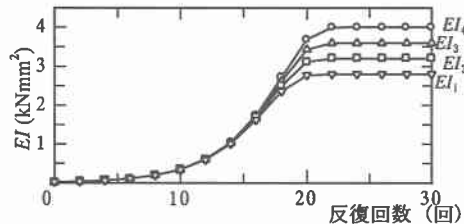
図-1 片持ち梁

表-1 曲げ剛性 ($\times 10^8 \text{ kNmm}^2$)

	EI_1	EI_2	EI_3	EI_4
EI (仮定)	4.00000	3.60000	3.20000	2.80000
N.R. 法	4.00000	3.60000	3.20000	2.80000
C.G. 法	4.00000	3.60000	3.20000	2.80000

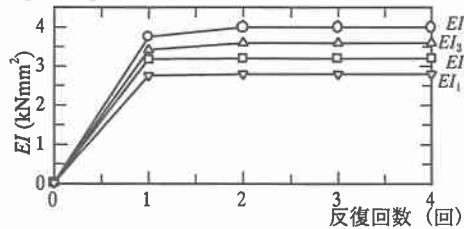
(N.R. 法: ニュートンラプソン法, C.G. 法: 共役勾配法)

【 $\times 10^8$ 】



(a) ニュートンラプソン法

【 $\times 10^8$ 】



(b) 共役勾配法

図-2 曲げ剛性の同定結果

3.2 分布荷重を受ける単純桁

図-3のような支間46.0mの単純桁の EI を同定する。本解析モデルは実橋規模のものを想定しており、荷重は死荷重 w_d とB活荷重 p_1, p_2 を載荷する。断面変化点⁵⁾はあらかじめ6点に固定し、左右対称性を考慮して4種類の断面の曲げ剛性を同定するものとする。観測値としては許容応力度を用いることとして各節点にデータとして与える。ニュートンラプソン法を用いた同定結果を図-4(a)に、共役勾配法を用いた同定結果を図-4(b)に示す。

表-2は反復計算が終了して得られた曲げ剛性の同定値を示している。両手法の同定結果は有効数字6桁まで完全に一致していることが分かる。ニュートンラプソン法を用いた場合は40回程度で収束するのにに対し、共役勾配法を用いた場合は僅か6回で収束しており、共役勾配法の方が収束性が良いことが分かる。

表-2 同定結果 ($\times 10^7 \text{kNm}^2$)

	EI_1	EI_2	EI_3	EI_4
N. R. 法	1.45537	2.67191	3.85671	4.98084
C. G. 法	1.45537	2.67191	3.85671	4.98084

(N. R. 法:ニュートンラプソン法, C. G. 法:共役勾配法)

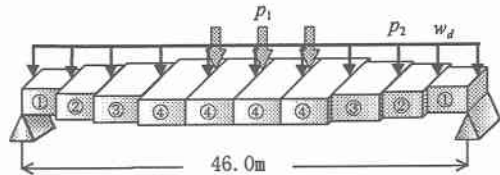
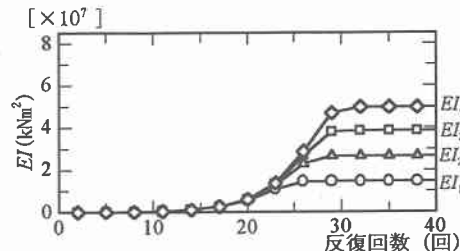
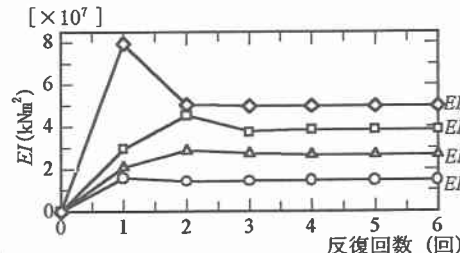


図-3 単純桁



(a) ニュートンラプソン法



(b) 共役勾配法

図-4 曲げ剛性の同定結果

4. おわりに

鋼桁の曲げ剛性を同定するために、ニュートンラプソン(N. R.)法及び共役勾配(C. G.)法による逆解析の定式化を行い、2種類の数値計算例を示した。片持ち梁の例では、順解析で求めた結果を模擬観測データとして与え、逆解析によって得られた曲げ剛性が最初に仮定した値に良く一致することを確認した。単純桁の例では観測値に許容応力度を用い、各断面の必要な剛性を同定した。解析手法については、N. R. 法、C. G. 法 両手法共に曲げ剛性は一定の値に収束し、1回の計算で複数の EI を同時に同定することができ、その値は両手法で一致する結果となった。反復計算について見ると、N. R. 法より C. G. 法の方が少ない反復回数で収束する結果が得られた。

参考文献

- 1) 村瀬治比古, 小山修平, 石田良平: 順・逆解析入門, 森北出版, 1990.
- 2) 頭井洋, 西川徹, 濱崎義弘, 新家徹: 拡張カルマンフィルターによるケーブルの曲げ剛性と張力の同時同定に関する基礎的検討, 土木学会論文集, No.556, pp.189-196, 1997.
- 3) 佐藤浩一, 田川和弘, 林川俊郎, 小幡卓司, 平沢秀之: 拡張カルマンフィルターを用いた不完全合成げたの合成度の同定とその応用について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第53号(A), pp. 188-193, 1997.
- 4) 戸川隼人: 共役勾配法, 教育出版, 1977.
- 5) (社)日本橋梁建設協会: '93 デザインデータブック, 1993.