

I-15

局所変形を考慮した梁の衝撃力波形について

北海道大学工学研究科 ○学生員 村井 伸康
 北海道大学工学研究科 フェロー 三上 隆
 釧路工業高等専門学校 フェロー 芳村 仁
 北海道大学工学研究科 学生員 柴田 俊文

1. はじめに

梁に作用する衝撃力の特性の把握は設計上重要である。本報告は、衝突体（剛球）と梁の衝突点における相互作用を考慮して、初期速度、梁の質量、曲げ剛性を考慮した動的等価剛性 k_{st} を用いて解析し、衝撃力波形の時間分布に与える衝突体、梁の寸法などの影響を明らかにしたものである。なお解析には、衝突体（剛球）と梁の相互作用（局所変形）の影響を、ばね（等価剛性）に置き換えた簡便な計算法¹⁾を用いた。

2. 解析方法

2-1. 基礎方程式

質量 m_c 、速度 v_0 の剛球が両端単純支持梁の中央に衝突する場合を考える。図-1に示すように局所変形の等価剛性を k_{st} とし、衝撃力は集中荷重で作用すると仮定した。梁には古典理論を採用し、モーダル解析を用いると、梁の運動方程式及び質点の運動方程式は以下のように示される²⁾。

$$\rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + k_1 (u_2 - u_1) \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$m_c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k_1 (u_1 - u_2) \delta \left(x - \frac{l}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

ここで ρ は密度、 A は梁の断面積、 EI は曲げ剛性で、 u_1 は剛球の変位、 u_2 は梁の変位である。梁の自由振動を考えると

$$\rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0 \quad (3)$$

基準振動は

$$u_2 = \sum_{s=1}^n \psi_s(t) X_s(x), X_s(x) = \sin \frac{s\pi x}{l} \quad (4)$$

とおける。(4)を(1)、(2)に代入して整理すると

$$\ddot{\psi}_n + \omega_n^2 \psi_n = \frac{2}{\rho A l} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ k_1 \left(u_1 - \sum_{s=1}^n \psi_s \sin \frac{s\pi}{2} \right) \right\} = 0 \quad (5)$$

$$m_c \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k_1 \left(u_1 - \sum_{s=1}^n \psi_s \sin \frac{s\pi}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

ただし $\omega_s = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{s\pi}{l} \right)^2}$ である。連立方程式(5)、(6)をマトリックス表示すれば、運動方程式及び衝

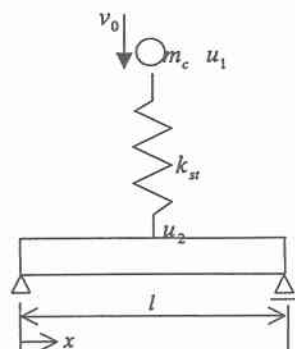


図-1 解析モデル

A Study on Impact Force on Beams Considering Local Deformation
 by Nobuyasu MURAI, Takashi MIKAMI, Jin YOSHIMURA and Toshifumi SHIBATA

撃力 f は次のように示される。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (7)$$

$$f = -m_c \{\ddot{u}_1\} \quad (8)$$

ここで、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{u\}$ は変位ベクトルである。

分離・付着条件は次の三つに分類することができる。

(1) 剛球衝突時の初期条件

接触点の初期速度 $\dot{u}_1$ は次のように示される。

$$\dot{u}_1 = v_0 \quad (9)$$

式 (9) 以外の梁・接触点の変位・加速度は 0 である。

(2) 分離時の条件

接触点の加速度が 0 になると分離し、その時刻を t_1 とする。時刻 t_1 における接触点と梁の変位と速度を、分離が始まる時の条件とする。分離時には、衝撃力は 0 となる。

(3) 再付着の条件

接触点と剛球の相対変位が 0 となる時刻 t_2 における変位と速度を再付着の条件とする。衝撃力は再び式 (8) で表される。

2-2. 動的等価剛性 k_{dy} の導出³⁾

剛球の質量、初期速度、梁の質量、曲げ剛性を様々に変化させてばね-質量系で解析を行い、修正 Hertz 理論を Newton-Raphson 法の使用により解析した結果と比較して衝撃力の最大値、接触時間がほぼ適合するように思考錯誤的に等価剛性を定めた。それらの等価剛性を用いて最小自乗法を使用することによって式 (10) を導出した。

$$k_{dy} = k_{st} \times 27.6 \times \exp \left(3 \times \left(\frac{h'}{h} \right)^4 \right) \times \left(\frac{\rho h^3}{m_c} + \frac{\rho h^3}{M_0} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{v_0}{c} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (10)$$

ここで M_0 は梁の質量、 c は縦波の速度、 k_{st} は文献¹⁾で求めた静的等価剛性である。

3. 解析結果

3-1. 衝撃力波形の分類

数値計算は正方形断面で $l/h=10 \sim 100$ に対して行った。ただし h は梁の高さである。なお $l/h=10 \sim 100$ に対する k_{st} は $k_{st} = 4 \times 10^6$ である。縦軸に衝撃力、横軸に時間を無次元化して表すと、衝撃力波形は図-2 の 4 種類に分類することができる。

- (a) 一回の衝突で衝撃が終了する A タイプ
- (b) 衝撃現象が終了するまで複数回の衝突をする B タイプ
- (c) 衝撃現象が終了せずに固有周期以上続く C タイプ
- (d) 一回衝撃現象が終了した後、C タイプ型の波形が現れる BC タイプ

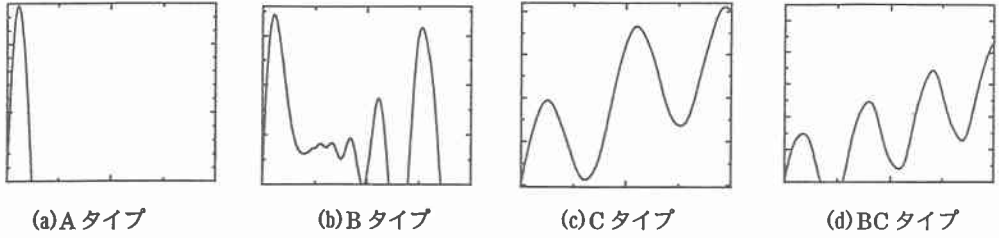


図-2 衝撃力波形の分類

3-2. 解の精度

37次の重ね合わせ解を厳密解として実線で表し次数の影響を調べた結果を以下に示す。ここで縦軸に衝撃力、横軸に時間を無次元化して示している。また破線が1次、点線が3次、(b)にある一点鎖線が17次までそれぞれ考慮した結果である。

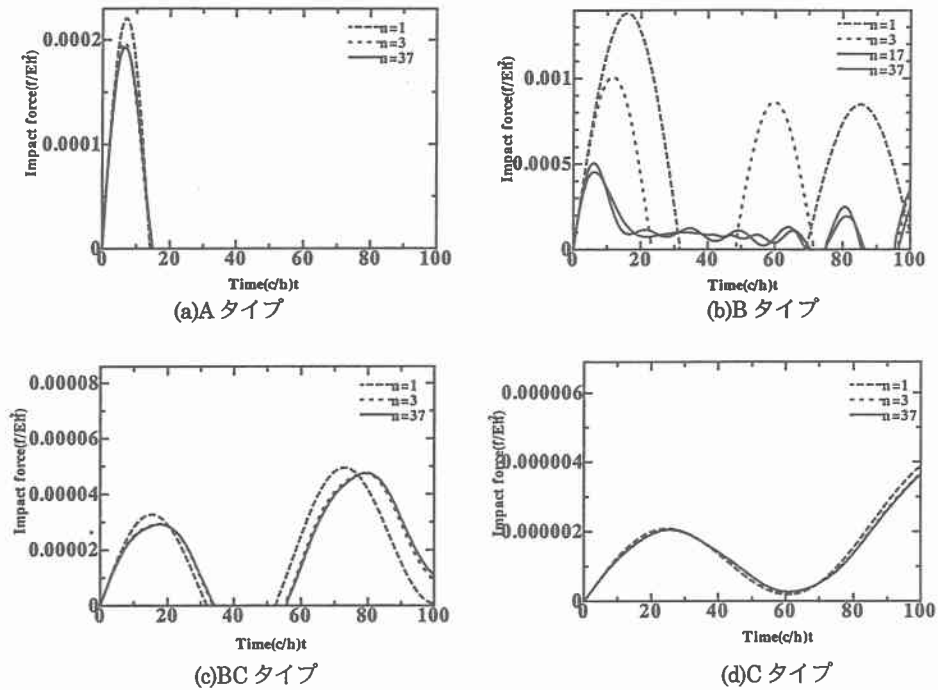


図-3 次数検討の結果

A・C・BCタイプは3次以上の重ね合わせはほとんど影響ないが、Bタイプの場合は厳密解に近くなるには多くの重ね合わせが必要である。

3-3. 衝撃力波形の分布

梁の高さ・幅を一定にして長さを変化させてタイプの分布を調べた。まず、 $v_0/c = 1.0 \times 10^{-3}$ を一定として m_c を変化させ横軸に k_{dy}/k_0 、縦軸に m_c/M_0 をとした場合の各タイプの分布は図-4 のようになった。

ただし $n=3.7$ 、 $k_0 = 48EI/l^3$ であり、梁の長さが長いほど k_{dy}/k_0 は大きくなる。図-3のように A タイプは m_c/M_0 が小さい部分に出現し、逆に B タイプは m_c/M_0 が大きい部分に現れた。そして梁の長さが長い場合に B タイプが多く発生した。また今回の速度では C タイプ・BC タイプは発生しなかった。

次に速度を $v_0/c = 1.0 \times 10^{-4}$ 、 $v_0/c = 1.0 \times 10^{-5}$ とそれぞれ一定にして他の条件はすべて同じにした場合のタイプの分布は図-5 のようになった。

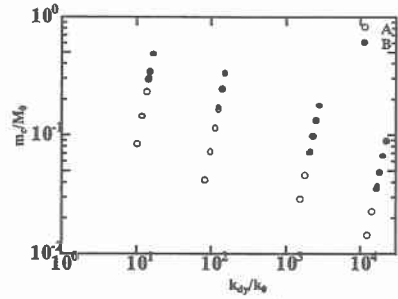
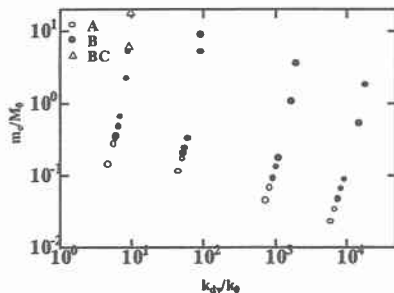
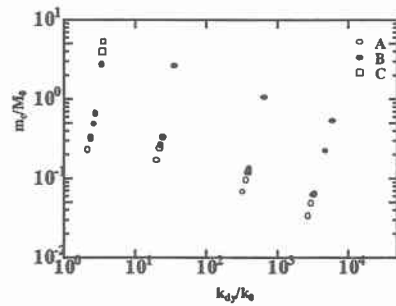


図-4 タイプの分布



(a) $v_0/c = 1.0 \times 10^{-4}$ の結果



(b) $v_0/c = 1.0 \times 10^{-5}$ の結果

図-5 タイプの分布

図-5(a)に示すように速度を遅くすると、梁が短く m_c/M_0 が大きいときに BC タイプが現れてくる。さらに速度を遅くすると C タイプが出現する。それ以外の場合ではどの速度でもほぼ同じように A タイプと B タイプが分布している (図-5 (b))。

4. まとめ

衝撃力は大きく分けて A・B・C・BC の 4 種類に分類することができる。そのうち A タイプは m_c/M_0 が小さいときに現れ、逆に B タイプは m_c/M_0 が大きいときに現れる。そして梁の長さが長い場合に B タイプが発生しやすい。また、C タイプ・BC タイプは速度が遅く梁の長さが短いときに現れ、A タイプ・B タイプの分布は速度を変化させてもあまり変わらない。重ね合わせの影響は B タイプではかなり大きい、他のタイプではあまり影響がない。

参考文献

- 1) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史, 荏澤憲吉: 局所変形を考慮した梁の衝撃力の一計算法, 構造工学論文集, vol44A, pp1753-1759, 1998
- 2) 小坪清真著: 土木振動学, 森北出版, 1973
- 3) 柴田俊文, 三上隆, 須藤敦史: 梁の衝撃問題における局所ばねの一考察, 土木学会北海道支部, 1999