

I-14

梁の衝撃問題における局所ばねの一考察

北海道大学大学院工学研究科 ○学生員 柴田俊文
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 三上 隆
 (株)地崎工業技術開発部 正会員 須藤敦史

1. まえがき

土木構造物の中には、その用途や環境によって車両や船舶、航空機の衝突、また落石や土石流、爆風などの衝撃的外力を受ける場合がある。このような衝撃的外力を受ける構造物の応答を明白にすることは設計上非常に重要であるが、その力学的挙動は複雑であり、構造物の種類やその材料特性にも密接に関連している。特に土木構造物は鋼、コンクリートから成る複合構造である場合が多いため問題をより一層複雑なものとしている。

そこで本研究では衝撃解析の基礎的な検討を行うことを目的として、梁に剛球が落下する衝撃応答の解析を行う。梁に剛球が衝突する場合、静荷重の場合における Hertz の接触理論を、梁の横振動方程式と衝撃点における局所の変形を考慮した修正 Hertz 理論に応用し、その理論に基づいて近似的に衝撃荷重を解析する方法が知られている。Timoshenko は 1913 年にこの理論を非線形積分方程式で表現してその解析を行った¹⁾。以来、この理論は平板、殻(シェル)等の様々な構造要素にも応用されており、有限要素法との併用による研究も数多い^{2)~10)}。しかし衝撃力を算出するには解析が困難である非線形方程式を解く必要があり、実用的な解析法とは言い難い。

以上の理由より衝撃体と被衝撃体の接触点の局所変形を解析が簡易であるばね-質量系にモデル化する例が多数報告されている。しかしそのモデル化の中で局所変形に相当するばね定数(等価剛性 k_l)及び質量(等価質量 m_l)の導出方法は不明確である場合が多かった。

これまでに筆者らは両端単純支持梁中央に静的に荷重を作用させ、上述したパラメータ(静的等価剛性 $k_l=k_{st}$ と記す)を求めて解析を行ってきた¹¹⁾。そして剛球と梁の分離、付着条件を考慮して数値妥当性の検討を行った。しかしその適用性は剛球の質量と初期速度に依存するという結果が得られた。

そこで本研究では剛球の初期速度、質量、梁の質量及び曲げ剛性の影響を考慮した動的等価剛性($k_l=k_{dy}$ と記す)の算定式を示した。そして k_{dy} を用いた際の等価質量の影響は小さいことからその影響を無視して解析を行い、本方法の適用性の確認を行う。また支持条件を数種類に変化させ、本方法の応用性を検討する。

2. 解析方法

(1) モデル化

図-1 に示す両端単純支持梁中央に初期速度 v_0 、質量 m_c の剛球が衝突するモデルを考える。ここで図-2 に示す長さ L 、高さ h 、幅 b 、中空部分の高さ h_0^* 、厚さ h_0 及び b_0 、剛性係数 E 、密度 ρ 、そして質量 M_0 の梁を解析に用いる。ただし剛球の初期速度は $v_0/c \leq 1.0 \times 10^{-3}$ (c は縦波の速度)の低速度、梁の断面は正方形のみを解析の対象とした。梁の理論は Bernoulli-Euler 梁理論を採用し、また、衝撃力波形が示されている結果では、修正 Hertz 理論を Newton-Raphson 法と有限要素法の併用により解析した衝撃力波形を厳密解として破線で、ばね-質量系を用いたものを実線で示す。またグラフはすべて値を無次元化して示した。

(2) 動的等価剛性 k_{dy} の導出方法

前述したように静的等価剛性 k_{st} を用いて解析を行った場合、その数値妥当性は剛球の初期速度と質量に依存した¹¹⁾。

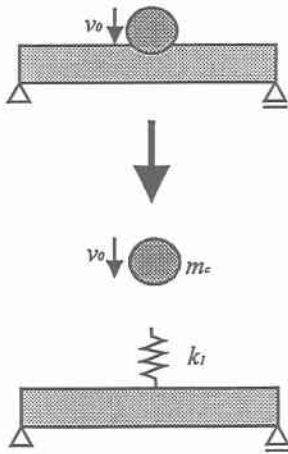


図-1 ばね-質量系へのモデル化

A Study on Equivalent Spring Parameter for Impact Analysis on the Beams
 By Toshifumi SHIBATA, Takashi MIKAMI and Atsushi SUTOH

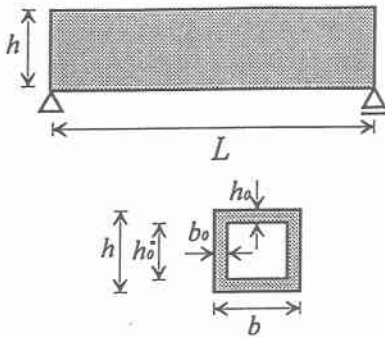


図-2 梁の横断面図

そこで最初に剛球の初期速度と質量、梁の質量と曲げ剛性を考慮に入れた動的等価剛性 k_{dy} の導出方法を示す。衝突回数が一回のみの正弦曲線の形状を有する衝撃力波形（図-4、以後正弦曲線タイプと称する）となる値（剛球の質量が $m_c/\rho h^3=1.0\times 10^{-6}, 1.0\times 10^{-2}, 1.0\times 10^{-1}, 1.0\times 10^0$ 、初期速度が $v_0/c=1.0\times 10^{-6}, 1.0\times 10^{-5}, 1.0\times 10^{-4}, 1.0\times 10^{-3}$ 、梁の長さが $L/h=10, 20, 50, 100$ 、断面が $h_0^*/h=0.0$ （中実）、 $0.4, 0.6, 0.8$ 、ただし質量の範囲は $1.0\times 10^{-7}<m_c/M_0<1.0$ となる）を用い、ばね-質量系を用いて厳密解に衝撃荷重の最大値と衝突時間がほぼ適合するように思考錯誤的に等価剛性（ k_{data} とする）を求め、算定式導出に使用するデータとした。なお m_1 は剛球の質量 m_c に比して非常に小さく動的等価剛性 k_{dy} への影響が微小であるので、その値を無視してデータ作成を行った。

縦軸に等価剛性、横軸に初期速度、 $L/h=10, h_0^*/h=0.6$ とし、剛球の質量を変化させたデータを図-3に示す。ただし本解析で用いた諸元ではこの他のデータも図-3とほぼ同様の値を示した。

また図-5に梁の長さとの等価剛性 k_{st} の関係を示す。 k_{st} は長さ依存せず、断面の形状のみの関数になることがわかる。

以上の結果より、まず式(1)に示すように動的等価剛性 k_{dy} を剛球の初期速度、剛球と梁の質量のべき乗の関数と仮定する。そして上述したように静的等価剛性 k_{st} は断面の形状のみの関数であるため、式(2)に示す関数で曲げ剛性の影響を表現して式(1)に導入する。これらの仮定から、作成したデータを用い、最小自乗法¹²⁾によりこれらの係数を決定する。

$$k_{dy}/k_{st} = \alpha_1 \cdot \exp(\beta_1 x_1) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{m_c/\rho h^3} + \frac{1}{M_0/\rho h^3} \right)^{\gamma_1} \cdot \left(v_0/c \right)^{\delta_1} \quad (1)$$

$$x_1 = \left(h_0^*/h \right)^4 \quad (2)$$

ここで係数 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 及び δ_1 は以下に示す値となった。

$$\alpha_1 = 27.6, \beta_1 = 3.17, \gamma_1 = -\frac{1}{3}, \delta_1 = \frac{2}{5}$$

γ_1, δ_1 のべき乗で表されている括弧はそれぞれ質量、初期速度の影響を表し、 k_{dy} は両者の増加関数であることがわかる。また図-3からも k_{dy} は初期速度のべき乗に比例していることを確認することができる。

3.数値解析

ここで数値解析結果を示すが、要素分割数は $N=40, 100$ として解析し、その結果が変わらなかったため、本研究では以下のすべての解析で $N=40$ を使用した。また時間刻み Δt は L/h

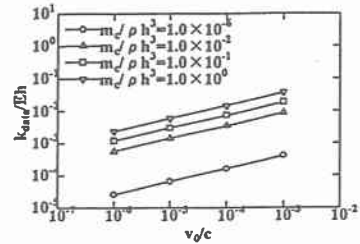


図-3 使用データ

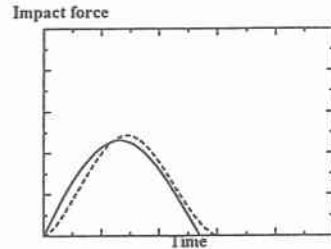


図-4 データに用いた衝撃力波形（正弦曲線タイプ）

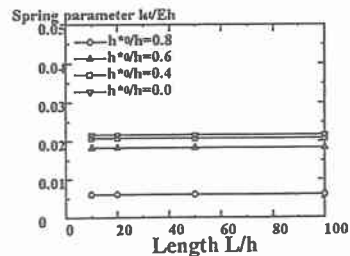


図-5 k_{st} と梁の長さの関係

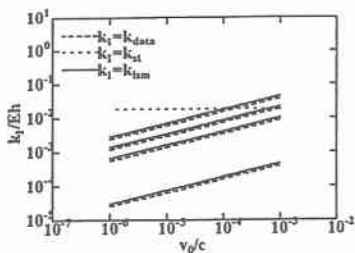


図-6 静的等価剛性 k_{st} と
動的等価剛性 k_{dy} の関係

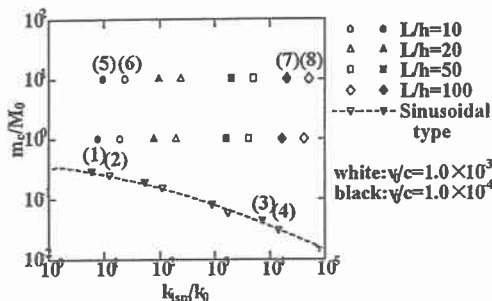


図-7 解析に用いる諸元

$=10$ 、 $h_0^*/h=0.8$ である梁の基本固有周期 ($T_0(c/h) \cong 171$) の $1/1000$ 以下とした。前述したように厳密解を破線、ばね-質量系での解を実線で示す。

(1) 動的等価剛性 k_{dy} の特性

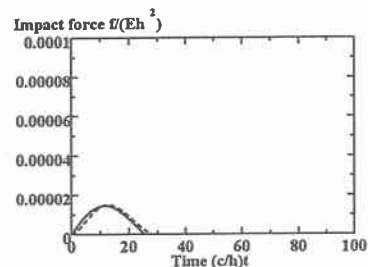
最初に式(1)を用いて図-3 のデータに対応させた結果を図-6 に示す。ここで実線が式(1)で求めた k_{dy} 、点線、破線がそれぞれ k_{st} 、 k_{data} を表す。 k_{st} は初期速度等の諸元に依らず一定であり、 k_{dy} は k_{data} とほぼ一致していることが確認できる。また、図-6 ではほとんどの k_{dy} が k_{st} の値よりも小さいことがわかる。等価剛性が大きいと衝撃力波形を過大に評価することになり、特に初期速度が小さいとき、あるいは剛球の質量が小さいときは、正弦曲線タイプの諸元で k_{st} を用いた場合、衝撃力波形は厳密解に比して大きい値となることが考察できる。

(2) 適用性の検討

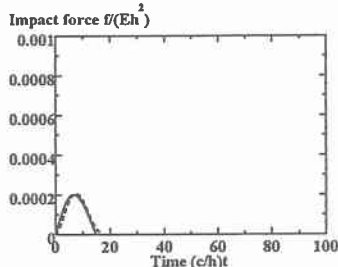
次に縦軸に質量、横軸に初期速度を示した値(図-7)を用いて適用性を検討した。なお図中の k_0 は梁中央に集中荷重が作用する際の曲げ変形に対する剛性である。ここで図-7 の丸、三角形、四角形、菱形はそれぞれ $L/h=10, 20, 50, 100$ の値を表し、白点、黒点はそれぞれ $v_0/c=1.0 \times 10^{-3}$ 、 $v_0/c=1.0 \times 10^{-4}$ を示す。また逆三角形(破線)は

データに用いた正弦曲線タイプの上限を示し、従って図-3 のデータはそれ以下の部分に含まれる。剛球の質量 m_c を 10 倍にしても k_{dy}/k_0 はほとんど変化していないが初期速度を 10 倍(黒点から白点に変化)にすると値が大きく変化している。前章でも述べたように初期速度は質量よりも k_{dy} に及ぼす影響が大きく、その影響を図-7 から確認することができる。

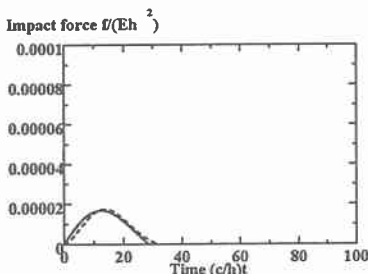
最初に本解析方法の衝撃力波



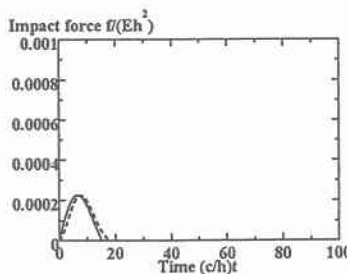
(a) 衝撃力波形(1)



(b) 衝撃力波形(2)



(c) 衝撃力波形(3)



(d) 衝撃力波形(4)

図-8 正弦荷重タイプの結果

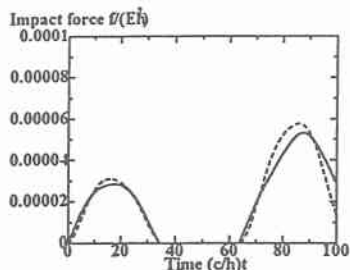
形に対する適用性を検討するため図-8 に示すようにデータに用いた正弦曲線タイプを使用して結果を示す。まず正弦曲線タイプについては図-8、そして他の衝撃力波形については図-9 に示す。ここで図-7(1)-(4)は図-8(a)-(d)、図-7(5)-(8)は図-9(a)-(d)にそれぞれ対応する。また題名に図-7 の番号を付して結果を整理した。

a) 正弦曲線タイプに対する適用性

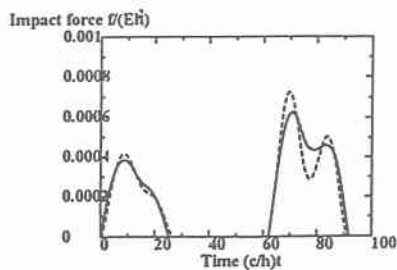
図-8(a)-(d)よりデータ作成に用いた正弦曲線タイプの衝撃力に対しては十分適用が可能であることがわかる。

b) 他の衝撃力波形に対する適用性

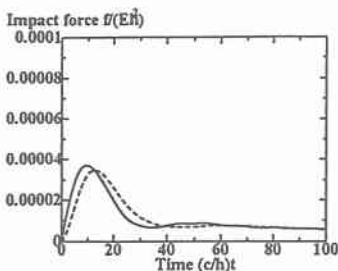
次に剛球の質量を大



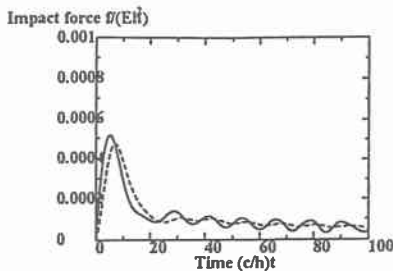
(a) 衝撃力波形(5)



(b) 衝撃力波形(6)

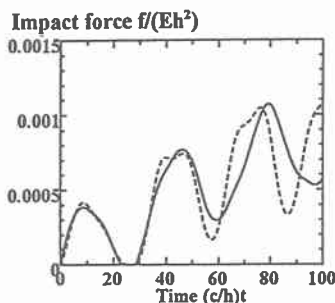


(c) 衝撃力波形(7)

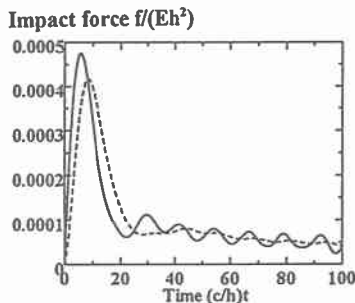


(d) 衝撃力波形(8)

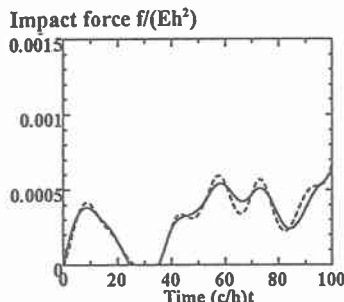
図-9 他の形状に対する結果



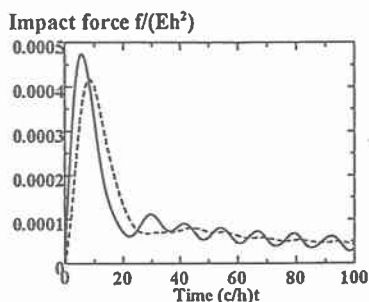
(a) 衝撃力波形(6)
(両端固定)



(b) 衝撃力波形(8)
(両端固定)



(c) 衝撃力波形(6)
(固定-単純支持)

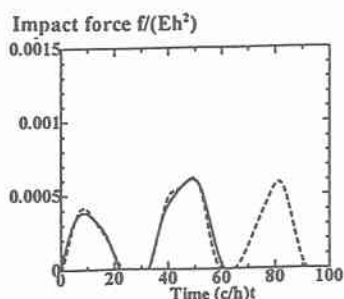


(d) 衝撃力波形(8)
(固定-単純支持)

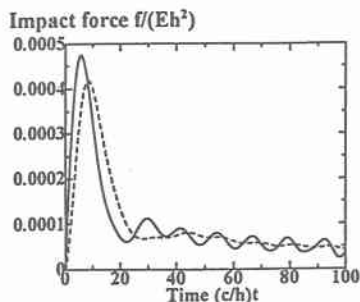
きくし、複数回衝突する衝撃力波形の場合に対する結果を示す。図-9(a)-(d)より正弦曲線タイプの範囲を超過しても良好な数値妥当性が得られることが確認できる。また等価質量を付加した結果を点線で示し、本解析方法に対する影響を検討したが、その影響は小さなものであった。

(3) 異なる支持条件への適用性

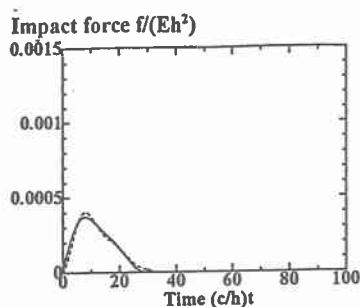
次に支持条件を(a)両端固定、(b)固定-単純支持、(c)固定-自由(片持ち梁)の三種類、さらに(c)の条件については剛球の落下地点 x_0 (固定端を原点とする)として(c-1)衝突する梁の中央($x_0 = 1/2 L$)、(c-2)梁



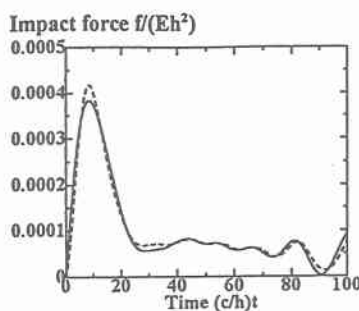
(e) 衝撃力波形(6)
(固定-自由(1), $x_c = 1/2 L$)



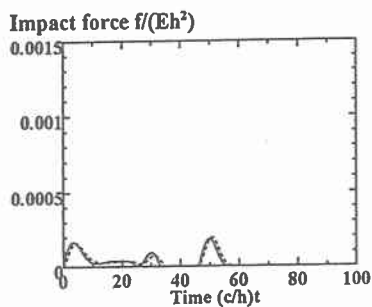
(f) 衝撃力波形(8)
(固定-自由(1), $x_c = 1/2 L$)



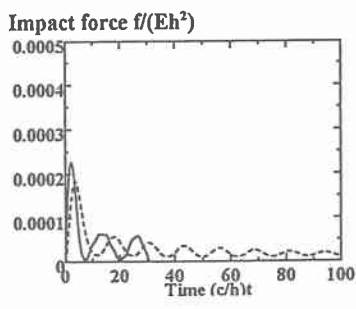
(g) 衝撃力波形(6)
(固定-自由(2), $x_c = 3/4 L$)



(h) 衝撃力波形(8)
(固定-自由(2), $x_c = 3/4 L$)



(i) 衝撃力波形(6)
(固定-自由(3), $x_c = L$)



(j) 衝撃力波形(8)
(固定-自由(3), $x_c = L$)

図-10 支持条件を変化させた結果

($x_c = 1/2 L$)、(c-2) 梁の全長の $3/4$ の地点 ($x_c = 3/4 L$)、(c-3) 梁先端 ($x_c = L$) の三種類、計五種類新たに用意した。結果を図-10(a)-(j)に示す。ここで解析に用いた諸元は先程と同様に図-7 の(6)と(8)とした。

$L/h=100$ の片持ち梁先端に剛球が落下するケースではやや厳密解との差異が大きくなるが(図-10(j))、一般に支持条件を変化させても良好な結果を得ることができた。

4.まとめ

本論文では文献 11)で示した解析方法の問題点をふまえ、剛球と梁の諸元等を考慮に入れた動的等価剛性の算定式を提示し、修正 Hertz 理論との比較によってその数値妥当性の検討を行ったものである。以下に本研究で得られた結果を示す。

- (1) 非線形方程式である修正ヘルツ理論をばね-質量系に置換することで簡易に解析を行うことが可能となり、衝撃力の解析に有効であることがわかった。
- (2) 剛球の質量、初期速度、梁の質量及び断面の値を変化させ、

それらの値を用いて最小自乗法より動的等価剛性 k_d を求めた。解析の結果、算定式作成のデータに用いた正弦曲線タイプのみならず複数回衝突を繰り返す衝撃力波形に対しても適用が可能であることを確認することができた。

- (3) 支持条件を変化させた解析では、 $L/h=100$ の片持ち梁先端に剛球が衝突する場合やや厳密解と乖離するが、良好な数値妥当性を確認することができた。以上の結果より本解析方法は様々な条件に対しても有効であるという結論が得られた。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. : Zur Frage der Wirkung eines Stosses auf Einer Balken, *Zeitschrift für Mathematik and Physik*, Vol.62, pp.198-209, 1913.
- 2) Sun, C.T. and Chattopadhyay, S. : Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mass, *Journal of Applied Mechanics*, pp.693-698, 1975.
- 3) Shivakumar, K.N. , Elber, W. and Illg, W. : Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, pp.674-680, 1985.
- 4) Lee, Y. , Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. : The lumped parameter method for elastic impact problems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.50, pp.823-827, 1983.
- 5) 神宮利夫, 松本浩之, 根津紀久雄, 坂本賢治 : 球の平板への衝突における衝撃荷重に及ぼす衝突接触挙動の影響, *日本機械学会論文集 (A編)*, 53 巻 496 号, pp.2331-2335, 1987.
- 6) 戸部俊美, 加藤正名 : 梁の横衝撃に関する研究, *日本機械学会論文集 (第1部)*, 38 巻 314 号, pp.2506-2513, 1972.
- 7) Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. : Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subject to lateral impact loads, *Transactions of the ASME*, Vol.57, pp.376-382, 1990.
- 8) Hsi-Yung, T.Wu, and Fu-Kuo Chang, : Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact, *Computers & Structures*, Vol.31, No.3, pp.453-466, 1989.
- 9) Liao, C.L., and Tsai, J.S. : Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3-D finite element, *Computers & Structures*, Vol.53, No.1, pp.53-61, 1994.
- 10) 衝撃問題小委員会: 構造物の衝撃挙動と設計法, 土木学会, 1993.
- 11) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史, 荻澤憲吉 : 局所変形の影響を考慮した梁の衝撃力の一計算法, *構造工学論文集*, Vol.44A, pp.1753-1759, 1998.
- 12) 近藤次郎 : 数学モデル 現象の数式化, 丸善株式会社, 1981.