

I-13

衝撃力を受ける四辺単純支持矩形床版に
荷重時間方向分布形状が及ぼす影響

専修大学北海道短期大学 ○ 正員 三上敬司 室蘭工業大学 フェロー 松岡健一
室蘭工業大学 正員 岸 徳光 北海道大学 フェロー 能町純雄

1. まえがき

平版の衝撃応答解析で扱う板理論には、古典板理論である薄板理論や薄板理論に板の回転慣性とせん断変形を考慮して修正した Mindlin 板理論などがある¹⁾。床版の衝撃挙動に関する研究では実験結果を近似した衝撃荷重を用いる場合²⁾や便宜的に衝撃荷重を仮定して用いる場合³⁾が一般的に多く見受けられる。重錘を床版に落下させた場合の衝撃力およびその挙動に関する研究成果に関してはあまり多く見当たらないようである⁴⁾⁵⁾。これらのことから、著者等は平底重錘を四辺単純支持矩形床版上に落下させた場合の動的挙動について、古典板理論と Mindlin 板理論よりモード重畳法を用いて応答解析している。応答解析は Hertz の弾性接触論より重錘底面による局部変形を考慮した積分方程式を解いて重錘落下衝撃力を求めている。さらに、たわみ、下縁曲げ歪、せん断力等は重錘落下衝撃力を床版に作用させて求め、得られた結果について両理論を比較し古典板理論の適用性について検討している⁶⁾。前述のように求めた重錘落下衝撃力と仮定した衝撃力を比較している研究成果についてはほとんど検討されていないように思われる。

そこで、本論文では Mindlin 板理論より解析的に求めた重錘落下衝撃力と力積一定とし台形、三角形および矩形の時間方向分布形状で近似した衝撃荷重を四辺単純支持矩形床版に作用させ、各たわみおよび下縁曲げ歪の応答波形について比較し荷重方向分布形状が及ぼす影響について検討する。なお、仮定した台形、三角形および矩形の荷重時間方向分布形状は6タイプを用いることとする。

2. 理論解析

図-1に示したように、四辺単純支持された矩形床版の中央点に衝撃荷重を受ける場合の衝撃挙動について Mindlin 板理論を用いて理論解析する。境界条件は、 x 方向の辺長を a 、 y 方向の辺長を b にとって、板厚 d 、せん断弾性係数 G 、ポアソン比 ν 、平均せん断係数 κ^2 、鉛直たわみ w 、 x 方向の回転角 ψ_x 、 y 方向の回転角 ψ_y とした場合の運動方程式は次式となる。

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \kappa^2 G d \left[\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] - \kappa^2 G d \left[\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\kappa^2 G d (\nabla^2 w + \psi) + q(x, y, z) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \left(\text{ここで, } \psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{である。} \right) \quad (3)$$

境界条件は四辺単純支持とすると、次式のように仮定する。

$$\begin{cases} x=0 \text{ で, } M_x(0, y, t) = w(0, y, t) = \psi_y(0, y, t) = 0, & x=a \text{ で, } M_x(a, y, t) = w(a, y, t) = \psi_y(a, y, t) = 0 \\ y=0 \text{ で, } M_y(x, 0, t) = w(x, 0, t) = \psi_x(x, 0, t) = 0, & y=b \text{ で, } M_y(x, b, t) = w(x, b, t) = \psi_x(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

初期条件は時間 $t=0$ で $w(x,y,0)=\frac{\partial w(x,y,0)}{\partial t}=0$, $\psi_x(x,y,0)=\frac{\partial \psi_x(x,y,0)}{\partial t}=0$, $\psi_y(x,y,0)=\frac{\partial \psi_y(x,y,0)}{\partial t}=0$

2.1 矩形床版の自由振動

4) 式の境界条件を満足するように解を次式のように仮定する。

$$w(x,y,t)=A_{jmn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \quad 5)$$

$$\psi_x(x,y,t)=B_{jmn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \quad 6)$$

$$\psi_y(x,y,t)=C_{jmn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \quad 7)$$

5) ~ 7) 式を 1) ~ 3) 式に代入し、荷重項 $q(x,y,t)=0$ において固有振動方程式を求め、固有振動数 ω_{jmn} はこの方程式を解いて m, n に対して 3 個ずつ求まる。

2.2 矩形板の強制振動

たわみ, x, y の回転角の解は、基準座標 $Q_{jmn}(t)$ を用いて表すと

$$w(x,y,t)=\sum_{j=1}^3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{jmn}Q_{jmn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad 8)$$

$$\psi_x(x,y,t)=\sum_{j=1}^3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{jmn}Q_{jmn}(t)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad 9)$$

$$\psi_y(x,y,t)=\sum_{j=1}^3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{jmn}Q_{jmn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \quad 10)$$

8) ~ 10) 式を 1) ~ 3) 式に代入し、自由振動式を用いて整理すると次式のように基準関数 $Q_{jmn}(t)$ に関する微分方程式が求まる。

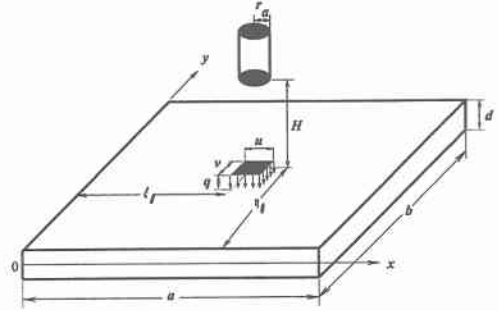
$$\ddot{Q}_{jmn}(t)+\omega_{jmn}^2Q_{jmn}(t)=\frac{1}{\rho dN_{jmn}^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y,t)\phi_w(x,y)dx dy \quad 11)$$

上式の部分分布荷重 $q(x,y,t)$ は、矩形床版上の重錘の落下点位置を (ξ_0, η_0) として、ディラックのデルタ関数を用いた集中荷重 $P(t)\delta(x-\xi_0)\delta(y-\eta_0)$ に置き換えその式を時間に関してラプラス変換し、さらにラプラス逆変換して基準関数 $Q_{jmn}(t)$ を求めると次式のようになる。

$$Q_{jmn}(t)=\frac{1}{\rho dN_{jmn}^2}\left[\frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0)\phi_w(x,y)}{\omega_{jmn}}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_{jmn}(t-\tau)d\tau\right] \quad 12)$$

ここで、 $\phi_w(\xi_0, \eta_0)=\sin\frac{m\pi\xi_0}{a}\sin\frac{n\pi\eta_0}{b}$ 、 $B'_{jmn}=B_{jmn}/A_{jmn}$ 、 $C'_{jmn}=C_{jmn}/A_{jmn}$ において $A_{jmn}=1$ とし正規化すると、各振動モード形は $\phi_w(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 、 $\phi_{\psi_x}(x,y)=B'_{jmn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 、 $\phi_{\psi_y}(x,y)=C'_{jmn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$ となる。従って、正規関数は $N_{jmn}^2=\frac{ab}{4}\left[1+\frac{d^2}{12}\left(B'^2_{jmn}+C'^2_{jmn}\right)\right]$ となる。

床版は実際の減衰振動することから、基準関数は各モードに対して減衰定数を h と一定とし、 $\omega_{jmn}'=\omega_{jmn}\sqrt{1-h^2}$ とおくと次式のように表される。



図一1 衝撃荷重を受ける
四辺単純支持矩形床版

$$Q_{jmn}(x, y, t) = \frac{1}{\rho d N_{jmn}^2} \left[\frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0) \phi_w(x, y)}{\omega_{jmn}'} \int_0^t P(\tau) e^{-h\omega_{jmn}'(t-\tau)} \sin \omega_{jmn}'(t-\tau) d\tau \right] \quad (13)$$

また、13) 式では集中荷重であるために Fourier 級数の収斂が良くないことから、荷重幅 (u, v) とする分布荷重 $q(x, y, t)$ として置き換えることにする。その場合の分布荷重は落下点 (ξ_0, η_0) に作用させると、以下のように示される。

$$q(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{uv} = \frac{P(t)}{uv} \int_{\xi_0 - u/2}^{\xi_0 + u/2} \int_{\eta_0 - v/2}^{\eta_0 + v/2} \phi_w(x, y) dx dy = \frac{4abP(t)}{mn\pi^2} \phi_w(\xi_0, \eta_0) \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b} \quad (14)$$

8) 式に 13) 式を代入したわみを求めると

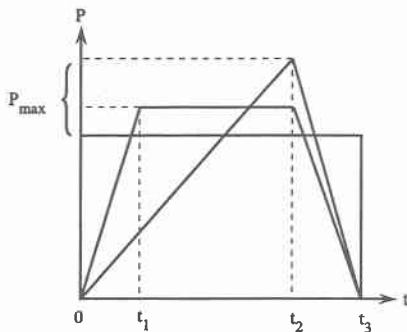
$$w(x, y, t) = \frac{4ab}{\rho d mn\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0) \phi_w(x, y)}{N_{jmn}^2 \omega_{jmn}'} \int_0^t P(\tau) e^{-h\omega_{jmn}'(t-\tau)} \sin \omega_{jmn}'(t-\tau) d\tau \quad (15)$$

13) 式より、 x 方向の曲げ歪を示すと、

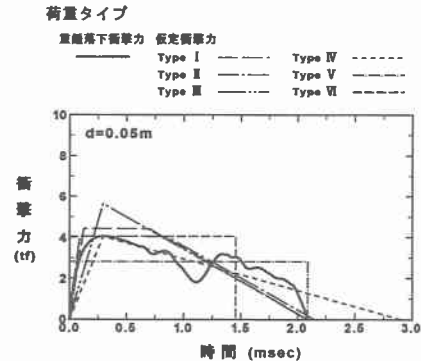
$$\epsilon_{xx} = z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \frac{-4abz}{mn\pi^2 d} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right) Q_{jmn}(t) B'_{jmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (16)$$

3. 数値計算例

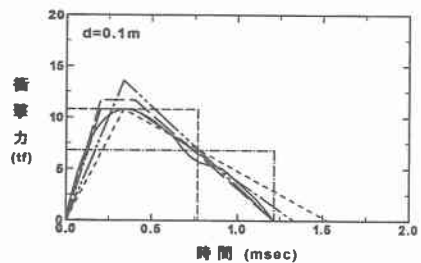
本論文では、主として室蘭工業大学に行われた四辺単純支持 RC 床版の衝撃実験データに基づいてパラメータを設定した¹⁾。床版の寸法はスパン $a=b=1.25m$ 、板厚 $d=0.1m$ で、物理定数は密度 $\rho=2.5t/m^3$ 、ポアソン比 $\nu=0.2$ 、弾性定数 $E=2.785 \times 10^6 tf/m^3$ である。なお、本論文では板厚が $d=0.05m$ についても検討することにする。平均せん断係数は、波長が無尽小でレーレー波に漸近することより $\kappa^2=0.83$ と決定した。重錘落下衝撃力は質量 $M=0.07t$ 、半径 $r_a=0.075m$ の平底重錘を床版中央に落下させた場合、床版に作用する衝撃力をモード重畳法より衝撃応答解析して求めている。本解析における Fourier 級数に関しては重錘落下衝撃力の場合では $m=n=300$ 項、曲げ歪の場合では $m=n=200$ 項、たわみの場合では $m=n=80$ 項を、時間刻みに関しては $t=$



図一2 3種類の仮定衝撃荷重



(a) $d=0.05m$ の場合



(b) $d=0.1m$ の場合

図一3 各床版厚における作用衝撃荷重

$10^{-1}\mu\text{sec}$ を計算に用いた。載荷幅は重錘底面を矩形等分布に等価して求めると、 $u=v=0.133m$ となる。また、仮定した荷重が作用した場合の Fourier 級数は曲げ歪の場合で $m=n=120$ 項、たわみの場合で $m=n=90$ 項を計算に用いた。減衰定数は文献 7) より $h=0.05$ とした。

3.1 作用衝撃力

図-2 は、台形、三角形、矩形形状の荷重時間方向分布を最大値 $P_{\max}$ 、最大値発生時間 t_1 、載荷継続時間 t_3 として示している。図-3(a), (b) は $d=0.05m$ および $d=0.1m$ の場合の重錘落下衝撃力、Type I ~ VI までの 6 種類の仮定荷重を示している。重錘落下衝撃力はいずれも初速度が $V=1m/sec$ で、

$d=0.05m$ の場合、最大値 $P_{\max}=4.0523tf$ 、載荷継続時間 $t_3=2.090msec$ 、 $d=0.1m$ の場合、最大値 $P_{\max}=10.784tf$ 、載荷継続時間 $t_3=1.215msec$ となる。6 種類の仮定荷重は前述より求めた重錘落下衝撃力の力積と同値になるように各形状の最大値および載荷継続時間を表-1, 2 に示すように決定した。なお、仮定衝撃力は各形状に対して 2 種類として、Type-I, III, V では載荷継続時間を、Type-II, IV, VI では最大値を重錘落下衝撃力と同値となるように決定した。

3.2 たわみの時刻歴応答

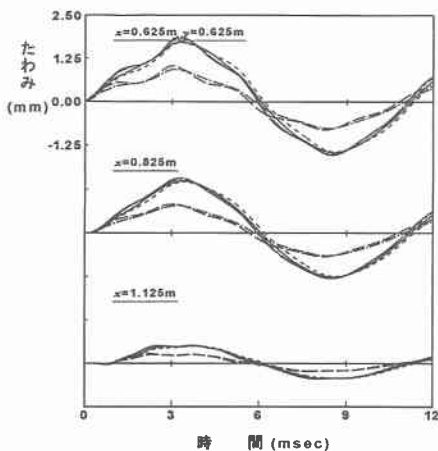
図-4(a), (b) は初速度 $V=1m/sec$ で板厚 $d=0.05, 0.1m$ におけるたわみの時刻歴応答を示している。なお、各たわみは載荷点中央 $x=0.625m, y=0.625m$ から支持部へ向って $x=0.825, 1.125m$ の位置の場合である。(a) 図において、たわみの応答値は載荷点中央で最大値を示した後減衰自由振動状態へ移行している。また、応答値は載荷点中央で最大値を示し支持部に向って徐々に減少し、波動の立ち上がり時間は支持部に向って次第に遅れることがわかる。応答波形は第 1 次固有振動に第 3 次固有振動を重ね合わせた状態を示している。床版の固有周期は約 $T=10.3msec$ となり、これに対して重錘落下衝撃力および Type-I ~ V の場合の周期は約 $11.1msec$ となり床版の固有周期よりやや長めとなっている。このことは、載荷継続時間が固有周期に対してやや長めによる影響であるものと考えられる。Type-VI の場合は載荷継続時間が他のタイプに比べてやや短めとなっているために約 $10.1msec$ となり床版の固有周期にほぼ一致していることからこのことが明らかである。重錘落下衝撃力と仮定衝撃荷重 (Type-I ~ VI) が作用した場合の最大たわみは重錘落下衝撃力の場合 $w_{\max}=1.73mm$ で、両者を比較すると重錘落下衝撃力に対して Type-I ~ IV ではほぼ等しい応答値を示し Type-V, VI では約 0.6 倍以下となっている。(b) 図における最大たわみは重錘落下衝撃力の場合 $w_{\max}=0.61mm$ で、両者を比較すると重錘落下衝撃力に対して Type-I ~ IV ではほぼ等しい応答値を示し Type-V, VI では約 0.6 倍となり、 $d=0.05m$ の場合と同様な傾向を示している。

表-1 力積を一定とした場合の 6 種類の荷重タイプ ($d=0.05m$)

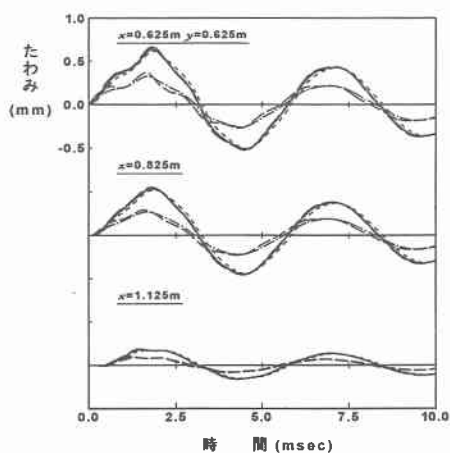
荷重タイプ	t_1 (msec)	t_2 (msec)	t_3 (msec)	$P_{\max}$ (tf)	荷重形状
Type I	0.125	0.7	2.090	4.4260	台 形
Type II	0.09	0.85	2.151	4.0523	台 形
Type III	-	0.295	2.090	5.6437	三角形
Type IV	-	0.295	2.911	4.0523	三角形
Type V	0	0	2.090	2.8219	矩 形
Type VI	0	0	1.455	4.0523	矩 形

表-2 力積を一定とした場合の 6 種類の荷重タイプ ($d=0.1m$)

荷重タイプ	t_1 (msec)	t_2 (msec)	t_3 (msec)	$P_{\max}$ (tf)	荷重形状
Type I	0.2	0.4	1.215	11.682	台 形
Type II	0.2	0.4	1.333	10.784	台 形
Type III	-	0.335	1.215	13.604	三角形
Type IV	-	0.335	1.533	10.784	三角形
Type V	0	0	1.215	6.802	矩 形
Type VI	0	0	0.766	10.784	矩 形

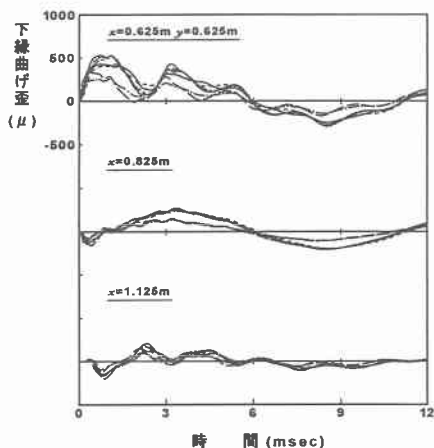


(a) $d=0.05\text{m}$ の場合

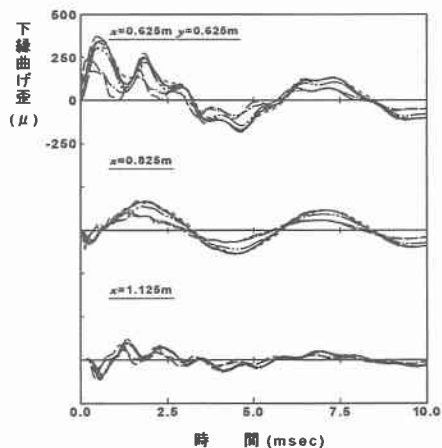


(b) $d=0.1\text{m}$ の場合

図-4 たわみの時刻歴応答



(a) $d=0.05\text{m}$ の場合



(b) $d=0.1\text{m}$ の場合

図-5 x 方向下縁曲げ歪の時刻歴応答

床版の固有周期は約 $T=5.2\text{msec}$ となり、これに対して重錘落下衝撃力および Type-I ~ V の場合の周期は約 5.8msec となり $d=0.05\text{m}$ の場合と同様にやや長めとなっている。一方、Type-VI の場合も約 5.5msec で前述した場合と同様に床版の固有周期にほぼ一致している。

これより、仮定荷重の場合のたわみは最大値発生時間と最大荷重かまたは載荷継続時間いずれかを重錘落下衝撃力波形に出来るだけ酷似するように台形および三角形荷重分布を仮定することによって、両者の応答波形もほぼ酷似することがわかった。一方、矩形荷重分布の場合は重錘落下衝撃力波形とかなり異なった荷重分布形状となることから、矩形荷重分布形状がたわみの応答値にかなり影響を及ぼしているものと考えられる。

3.3 x 方向下縁曲げ歪の時刻歴応答

図-5 (a), (B) は初速度 $V=1\text{m/sec}$ で板厚 $d=0.05, 0.1\text{m}$ における x 方向下縁曲げ歪の時刻歴応

答を示している。なお、各図は x 方向 $x=0.625, 0.825, 1.125m$ における下縁曲げ歪応答波形を示している。(a) 図における下縁曲げ歪の波形は載荷点中央で最大値を示した後支持部に向って徐々に減少し、さらに波動の立ち上がり時間は支持部に向って次第に遅れることと衝撃初期において負の曲げ歪が発生し固定端のような挙動を示していることがわかる。また、その波形は第3次振動モードが卓越する状態で第1次振動モードと連成している。重錘落下衝撃力と仮定衝撃荷重 (Type-I ~ VI) が作用した場合の最大下縁曲げ歪は重錘落下衝撃力の場合 $\epsilon_{\max}=430\mu$ で、両者を比較すると重錘落下衝撃力に対して Type-I ~ IV の場合ではほぼ等しい応答値を示し Type-V, VI の場合では約 0.8 倍以下となる。(b) 図における最大下縁曲げ歪も重錘落下衝撃力の場合 $\epsilon_{\max}=347\mu$ で、両者を比較すると重錘落下衝撃力に対して Type-I ~ IV の場合ではほぼ等しい応答値を示し Type-V, VI の場合では約 0.7 倍を示し $d=0.05m$ の場合と同様な傾向を示している。

これより、仮定荷重の場合の下縁曲げ歪はたわみの場合と同様に最大値発生時間と最大荷重または載荷継続時間いずれかを重錘落下衝撃力波形に出来るだけ酷似するように一致させて台形および三角形荷重分布を仮定すれば、重錘落下衝撃力による応答波形に近似可能であることがわかった。一方、矩形荷重分布の場合は重錘衝撃力波形とかなり異なった荷重形状となることから下縁曲げ歪応答波形に大きな影響を及ぼしているものと考えられる。

4. あとがき

本解析では、平底重錘が四辺単純支持矩形床版の中央に落下した場合の重錘落下衝撃力と6タイプの仮定した衝撃荷重(台形、三角形、矩形形状)を床版に作用させた場合のたわみ、下縁曲げ歪について Mindlin 板理論を用いて誘導した。なお、仮定荷重は重錘落下衝撃力の時刻歴応答波形より力積を求め、この力積が一定となるように各荷重分布の最大値、最大値が発生する時間および載荷継続時間を設定した。本論文では板厚 $d=0.05, 0.1m$ について各時間方向荷重分布形状が各応答波形に及ぼす影響について検討した。

得られた解析結果を、要約すると以下ようになる。

- 1) 台形、三角形荷重形状における最大たわみおよびその応答波形は重錘落下衝撃力の場合の最大たわみおよび応答波形にほぼ近似していることがわかった。
- 2) 台形、三角形荷重形状における最大下縁曲げ歪およびその応答波形はたわみの場合と同様に重錘落下衝撃力の場合の最大下縁曲げ歪および応答波形にほぼ近似していることがわかった。
- 3) 矩形荷重分布形状の場合はたわみおよび下縁曲げ歪の応答波形に大きな影響を及ぼしていることがわかった。

参考文献

- 1) MINDLIN, R.D. 1951. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, ASME, 31~38.
- 2) 岸 徳光・松岡健一・大沼博志・能町純雄: 四辺単純支持 RC 矩形板の重錘落下衝撃実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp.1587~1596, 1992.3.
- 3) 芳村仁・三上隆・運上茂樹・若林学: ロックシェッドに作用する落石の衝撃力, 土木学会北海道支部論文報告集, pp.103~108, 1985年.
- 4) 大沼博志: コンクリート構造物の高温クリープと衝撃応答特性に関する研究, 北海道大学学位論文, 1984.
- 5) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析, 岩手大学工学部研究報告, Vol.37, pp.127~138, 1984.
- 6) 三上敬司・松岡健一・岸徳光・能町純雄: 重錘落下による四辺単純支持矩形床版の動的挙動, 土木学会北海道支部論文報告集第54号(A), pp.68~73, 1998.
- 7) 佐藤昌志, 岸 徳光, 三上 浩, 松岡健一: 大型 RC 版の耐衝撃特性, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.1499~1506, 1997.3.