

II-74

波と浮体運動の相互干渉について

北見工業大学大学院 学生員 大橋 正臣  
 北海道東海大学工学部 正員 浜中建一郎  
 北見工業大学工学部 正員 佐藤 幸雄

1. まえがき

波動場内、特に港湾のような有限海域内における浮体運動を純解析的に解くのは、非常に単純な浮体形状と港湾形状の場合に限られる(井島他:1972)。従って何らかの数値解析の手法を考える必要がある。数値解析の手法は一般的に、差分法、有限要素法、境界要素法が挙げられるが、浮体の回りの流れが完全に3次元的存在であることを考慮すると境界要素法が有利であると考えられる。

境界要素法を用いた場合にも、波の場を予め求めそれによる流体力から浮体運動を求める方法と(清川他:1983、榎木他:1988、清川他:1993)、波の場と浮体運動を同時に解く方法とに大別される。しかしながら、前者の方法では比較的狭い港内や水路内で起こる波と浮体運動との相互作用を解くことは出来ない。一方後者でこれまで報告されている方法では(井島他:1978)、特異関数として主要解を用いているため、未知数を全境界(浮体没水面、水面、底面、防波堤没水面)に配置する必要があり、3次元解析では未知数が多大となり現実的ではない。

このことから本研究では、特異関数としてグリーン関数を用い、波の場と浮体運動とを同時に解く方法を提案する。この方法によれば未知数は浮体没水面と防波堤没水面に配置するだけで良く、必要な未知数の数は圧倒的に少なくすむと同時に、波の場と浮体運動との相互作用も解析することが出来る。また、数値解析と同時に断面2次元水槽を用いて、矩形浮体について実験を行い、実験結果と上記解析結果の比較検討を行う。

2. 基礎方程式

ポテンシャル流れと周期解を仮定する。全ての変量を角周波数 $\hat{\omega}$ 、と重力加速度 $\hat{g}$ とで無次元化すると( $\hat{\cdot}$ は有次元量を表す)、速度ポテンシャルは、 $\Phi = \text{Re}\{\phi e^{-it}\}$

これに対する基礎方程式と境界条件は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi \quad \text{on} \quad z = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = A(x, z) \quad \text{on} \quad S_B \tag{4}$$

ここで $A(x, z)$ は物体表面 $S_B$ 上での表面の法線方向 $n$ の移動速度の振幅を表す。

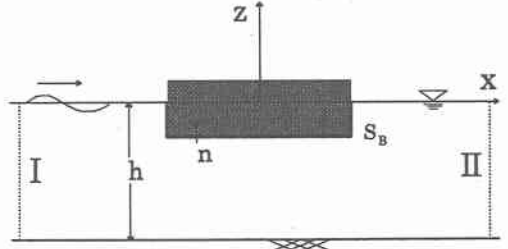


図1 座標系

3. Green 関数と積分方程式

グリーン関数の公式から導かれる積分方程式は、

$$C\phi_{(P)} = \int_S \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \tag{5}$$

ここで、 $G$ は特異関数、 $S$ は領域を囲む境界を表す。また、 $\partial/\partial n$ は境界上の外向き法線方向微分を表す。特異関数 $G$ として主要解を用いると境界 $S$ の全てについて積分する必要がある。

Interactions between waves and motions of a floating body  
 by Masami OHASHI, Ken-ichiro HAMANAKA and Yukio SATO

一方、John の Green 関数では、

$$G = C_0 e^{ik|x-z_p|} \cosh k(z_p + h) \cosh k(z + h) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-k_m|x-z_p|} \cos k_m(z_p + h) \cos k_m(z + h)$$

$$C_0 = i/k(h + \sinh^2 kh)$$

$$C_m = 1/k_m(h - \sin^2 k_m h)$$

この Green 関数は水面と底面の境界条件を満たしているため、水面と底面は積分に寄与しない。放射条件を考慮すると、遠方境界 I、II では反射波・透過波について積分に寄与しない。従って、入射波と物体表面の積分だけが残る。よって、(5)は以下ようになる。

$$C\phi_{(P)} = \int_{S_2} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS + C_0 \phi_0 \quad (6)$$

尚、 $\phi_0$  は入射波ポテンシャルを表し、係数 C は、浮体表面上のポテンシャルを求めるときは  $-1/2$  として積分し、領域内・水面・底面のポテンシャルを求めるときは  $-1$  として積分するものとする。以上が積分方程式である。

#### 4. 浮体の運動方程式

断面 2 次元問題を考えているから、浮体の運動は鉛直・水平方向の並進運動と、浮体の中心点(例えば重心)の回りの回転運動とで表される。

中心点の座標を X、Z で表すと、

$$m \left( \frac{d^2 X}{dt^2} \right) = F_x \quad (7)$$

$$m \left( \frac{d^2 Z}{dt^2} \right) = F_z \quad (8)$$

$$I \left( \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = M \quad (9)$$

ここで m は浮体の質量、 $F_x$ 、 $F_z$  は浮体に働く x 方向、z 方向の力、I は慣性モーメント、 $\theta$  は回転角、M は浮体に働く力のモーメントである。同様に、 $\hat{\omega} \cdot \hat{g} \cdot \hat{\rho}$  で無次元化している ( $\hat{\rho}$ : 水の単位体積重量)。

#### 5. 浮体没水面上の境界条件

浮体没水面上の境界条件としては、運動学的境界条件と力学的境界条件が考えられる。

前者は、浮体の運動に伴う没水面の法線方向速度は、それに接する流体の法線方向速度に一致す

ることを意味する。後者は、流体の運動を生じさせる力は、回りの流体力と浮体に働く重力とであることを意味する。

#### 5-1. 運動学的境界条件

最初に回転運動を考える。静水時の重心の位置を  $(x_0, z_0)$  とし、それを原点とする局所座標を  $(x', z')$  とする。静水時の表面の座標を  $(x'_0, z'_0)$  と極座標で表し  $(R, \theta)$  とする (図 2 参照)。

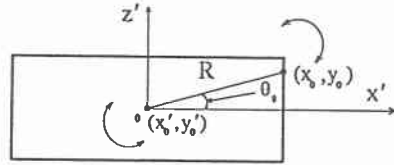


図 2, 局所座標

$\theta$  が周期変動するとして

$$\theta = \theta_0 + \alpha_0 e^{-it} \quad (10)$$

$\alpha_0$ : 回転振幅

時刻 t の時の  $(x', z')$  座標は

$$\begin{aligned} x' &= R \cos \theta = R \cos(\theta_0 + \alpha_0 e^{-it}) \\ &= R \cos \theta_0 \cos(\alpha_0 e^{-it}) - R \sin \theta_0 \sin(\alpha_0 e^{-it}) \end{aligned}$$

微小振幅とすると ( $|\alpha_0| \ll 1$ )

$$|\alpha_0 e^{-it}| \ll 1$$

従って

$$\begin{aligned} x' &= R \cos \theta_0 - \alpha_0 e^{-it} R \sin \theta_0 \\ &= x'_0 - \alpha_0 z'_0 e^{-it} \end{aligned} \quad (11)$$

同様に

$$\begin{aligned} z' &= R \sin \theta = R \sin(\theta_0 + \alpha_0 e^{-it}) \\ &= R \sin \theta_0 \cos(\alpha_0 e^{-it}) + R \cos \theta_0 \sin(\alpha_0 e^{-it}) \\ &= R \sin \theta_0 + \alpha_0 e^{-it} R \cos \theta_0 \\ &= z'_0 + \alpha_0 x'_0 e^{-it} \end{aligned} \quad (12)$$

水平・鉛直方向の並進運動による変位を各々

$$\alpha_x e^{-it}, \quad \alpha_z e^{-it} \quad (13)$$

$\alpha_x$ : 水平運動振幅、 $\alpha_z$ : 鉛直運動振幅

とすると、3つの運動による位置は

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0 + \alpha_x e^{-it} - \alpha_0 z'_0 e^{-it} \\ z = z_0 + z'_0 + \alpha_z e^{-it} + \alpha_0 x'_0 e^{-it} \end{cases} \quad (14)$$

従って、 $x$  方向、 $z$  方向の速度は

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = (-i\alpha_x + i\alpha_0 z'_0) e^{-it} = B_x e^{-it} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = (-i\alpha_z - i\alpha_0 x'_0) e^{-it} = B_z e^{-it} \end{cases} \quad (15)$$

$(x'_0, z'_0)$  の位置の物体表面の法線単位ベクトルを  $(n_x, n_z)$  とすると、(15) から (4) の  $A$  は

$$A = (n_x, n_z) \cdot (B_x, B_z) = n_x B_x + n_z B_z \quad (16)$$

として与えられる。

## 5-2. 力学的境界条件

### 5-2.1. 浮体に働く力

浮体に働く流体力はポテンシャル流れに対する圧力方程式から、( $\hat{\quad}$  は有次元量を表す)。

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + \frac{\hat{P}}{\rho} + \hat{g}z + \frac{1}{2}(\nabla \hat{\Phi})^2 = 0$$

線形化して、無次元化すると、

$$P = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - z \quad (17)$$

$\Phi = \phi e^{-it}$  を代入、

$$P = i\phi e^{-it} - z \quad (18)$$

圧力は物体表面の法線方向に働くから、

$$\begin{cases} P_x = n_x P \\ P_z = n_z P \end{cases} \quad (19)$$

浮体に働く圧力は、

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{S_B} P_x dS \\ &= ie^{-it} \int_{S_B} n_x \phi dS - \int_{S_B} n_x z dS \end{aligned} \quad (20)$$

(20) の右辺第 2 項は静水圧による水平方向の全圧力で、その積分は零になるから、

$$F_x = ie^{-it} \int_{S_B} n_x \phi dS \quad (21)$$

ここで法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は、浮体の運動に伴って向きを変えるから、(21) の右辺の  $n_x$  も運動に伴って、値を変えるが微小運動を仮定しているから、静止時の  $n_x$  とする。

浮体に働く鉛直方向の全圧力と浮体に働く重力とを合わせて、

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{S_B} P_z dS - m \\ &= ie^{-it} \int_{S_B} n_z \phi dS - \int_{S_B} n_z z dS - m \end{aligned} \quad (22)$$

(22) の右辺の第 2 項は静水圧による鉛直方向の全圧力で、(14) を用いて静水時の表面の位置とそれからの偏差で表すと、

$$\begin{aligned} \int_{S_B} n_z z dS &= \int_{S_B} n_z (z_0 + z'_0) dS \\ &\quad + e^{-it} \int_{S_B} n_z (\alpha_z + \alpha_0 x'_0) dS \end{aligned}$$

となるが、上式の右辺第 1 項は静水時の静水圧による力で、明らかに重力と釣り合っているから、

$$\begin{aligned} F_z &= ie^{-it} \int_{S_B} n_z \phi dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} n_z (\alpha_z + \alpha_0 x'_0) dS \end{aligned} \quad (23)$$

ここで  $n_z$  は (21) の場合と同様、運動を微小と仮定して静止時の値をとるとする。

### 5-2.2. 浮体に働くモーメント

重心回りの力のモーメントは

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}' P_z - \mathbf{z}' P_x$$

従って、没水面全体では、

$$\mathbf{M} = \int_{S_B} (\mathbf{x}' P_z - \mathbf{z}' P_x) dS \quad (24)$$

(18) (19) から、

$$\begin{aligned} P_x &= in_x \phi e^{-it} - n_x x \\ P_z &= in_z \phi e^{-it} - n_z z \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' P_z - \mathbf{z}' P_x &= i\phi e^{-it} (n_z \mathbf{x}' - n_x \mathbf{z}') \\ &\quad - \mathbf{z}' (n_z \mathbf{x}' - n_x \mathbf{z}') \end{aligned}$$

であるから (24) は、

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z \mathbf{x}' - n_x \mathbf{z}') \phi dS \\ &\quad - \int_{S_B} (n_z \mathbf{x}' - n_x \mathbf{z}') \mathbf{z}' dS \end{aligned} \quad (25)$$

ここで  $(\mathbf{x}', \mathbf{z}')$  は局所座標であることを考慮し、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z \mathbf{x}'_0 - n_x \mathbf{z}'_0) \phi dS \\ &\quad - \int_{S_B} (n_z \mathbf{x}'_0 - n_x \mathbf{z}'_0) \mathbf{z}'_0 dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} (n_z \mathbf{x}'_0 - n_x \mathbf{z}'_0) (\alpha_z + \alpha_0 \mathbf{x}'_0) dS \\ &\quad - e^{-it} \int_{S_B} \{n_z (\alpha_z - \alpha_0 z'_0) - n_x (\alpha_z + \alpha_0 x'_0)\} z'_0 dS \end{aligned} \quad \dots (26)$$

(26)の右辺第2項は、静止時における静水圧による力のモーメントであるから釣り合いの条件で零。(26)は、 $\alpha_x$ 、 $\alpha_z$ 、 $\alpha_\theta$ でまとめて、

$$\begin{aligned}
 M &= ie^{-it} \int_{S_B} (n_z x'_0 - n_x z'_0) \phi dS \\
 &\quad - e^{-it} \alpha_x \int_{S_B} n_x z'_0 dS \\
 &\quad - e^{-it} \alpha_z \int_{S_B} (n_z x'_0 - 2n_x z'_0) dS \\
 &\quad - e^{-it} \alpha_\theta \int_{S_B} \left\{ n_z (x'_0)^2 - 2n_x x'_0 z'_0 - n_x (z'_0)^2 \right\} dS \\
 &\quad \dots(27)
 \end{aligned}$$

### 5-2.3. 全運動の力学的境界条件

運動方程式(7)、(8)、(9)を書き直し、力学的境界条件を導出する。

x方向・z方向の重心の移動、重心回りの回転は

$$\alpha_x e^{-it}, \quad \alpha_z e^{-it}, \quad \alpha_\theta e^{-it}$$

から、それぞれの時間tの2階微分は、

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\alpha_x e^{-it}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\alpha_z e^{-it}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\alpha_\theta e^{-it},$$

運動方程式(7)は、(21)より

$$-m\alpha_x = i \int_{S_B} n_x \phi dS \quad (28)$$

運動方程式(8)は、(23)より

$$\begin{aligned}
 -m\alpha_z &= i \int_{S_B} n_z \phi dS \\
 &\quad - \int_{S_B} n_z (\alpha_x + \alpha_\theta x'_0) dS \quad (29)
 \end{aligned}$$

運動方程式(9)は、(26)より

$$\begin{aligned}
 -I\alpha_\theta &= i \int_{S_B} (n_z x'_0 - n_x z'_0) \phi dS \\
 &\quad - \alpha_x \int_{S_B} n_x z'_0 dS \\
 &\quad - \alpha_z \int_{S_B} (n_z x'_0 - 2n_x z'_0) dS \\
 &\quad - \alpha_\theta \int_{S_B} \left\{ n_z (x'_0)^2 - 2n_x x'_0 z'_0 - n_x (z'_0)^2 \right\} dS \\
 &\quad \dots(30)
 \end{aligned}$$

この(28)、(29)、(30)を力学的境界条件とする。

### 6. 境界要素法による解析

浮体の運動を境界要素法により解くことを考える。境界要素法では、積分方程式(6)を離散化

して連立一次方程式を解くが、未知数として没水壁上のポテンシャルだけでなく、各運動の振幅( $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_\theta$ )も未知数として残る。そこで、力学的境界条件(28)、(29)、(30)を連立させることにより、境界上のポテンシャルと共に各振幅も求められる。得られた境界上のポテンシャル・各振幅を離散化した積分方程式に代入すると、任意の位置でのポテンシャルが分かる。

### 7. 実験方法

実験水槽は、幅25cm、深さ50cm、長さ22mの断面2次元水槽、吸収式造波装置を使用した。浮体は木材、発泡スチロールの2種類で、R1を50cm、70cmとして合計4種類の浮体を用いた。

測定方法は、周期0.6~1.3秒の内10通り、波高2cm,4cmの波を入射させ、ビデオで撮影して、ディスプレイから重心の移動、最大傾斜角を10波程度計測し、その平均により各振幅とした。

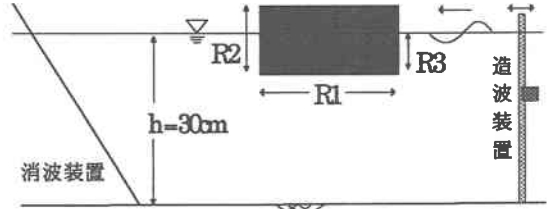


図3実験水槽

素 材	R 1 (cm)	R 2 (cm)	R 3 (cm)
木 材	50.0	10.2	5.3
	70.0	10.2	5.4
発泡スチ ロール	50.0	10.0	0.7
	70.0	10.0	0.7

表1, 実験浮体

### 8. 解析及び実験結果

図4から図8は解析結果と実験結果を表したものである。横軸は浮体の代表的な長さR1を入射波長Lで割って無次元化したもので、縦軸は、回転運動振幅を除き、各振幅を入射波高で割って無次元化したものである。

図4～図6は、浮体材料を木材として、図7、図8は浮体材料を発泡スチロールを用いている。図4は水平運動振幅 $\alpha_x$ を表し、図5・図7は鉛直運動振幅 $\alpha_z$ 、図6・図8は回転運動振幅 $\alpha_\theta$ を表している。

各々の図で、実線は  $R1=50\text{cm}$ 、点線は  $R1=70\text{cm}$  のときの解析結果で、○は  $R1=50\text{cm}$  に対する実験値、同じく□は  $R1=70\text{cm}$  に対する実験値である。

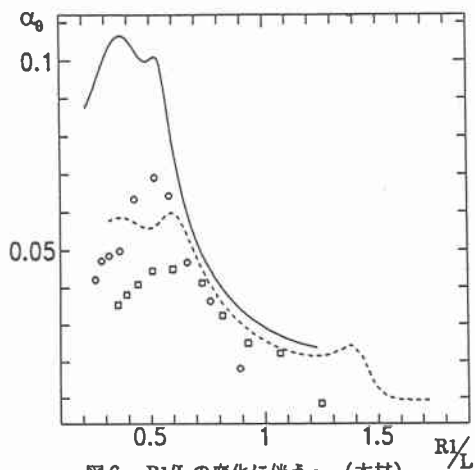


図6,  $R1/L$  の変化に伴う  $\alpha_\theta$  (木材)

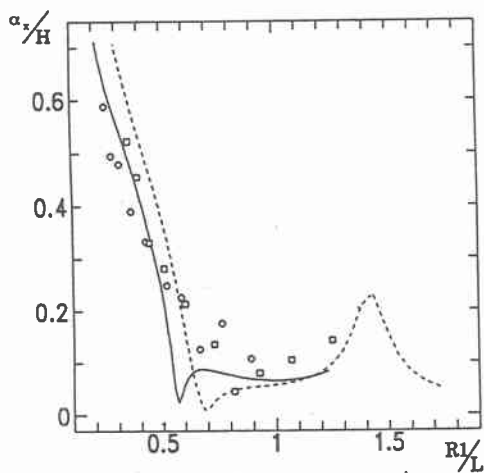


図4,  $R1/L$  の変化に伴う  $\alpha_x/H$  (木材)

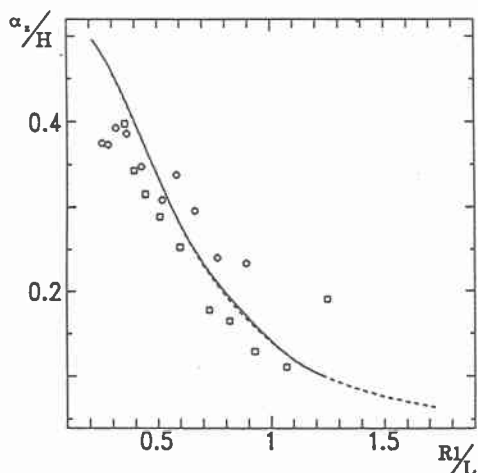


図7,  $R1/L$  の変化に伴う  $\alpha_z/H$  (発泡スチロール)

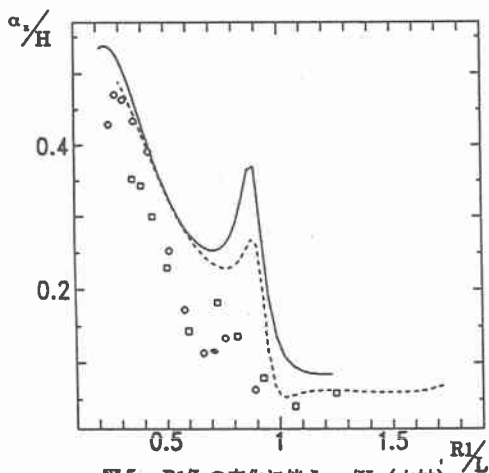


図5,  $R1/L$  の変化に伴う  $\alpha_z/H$  (木材)

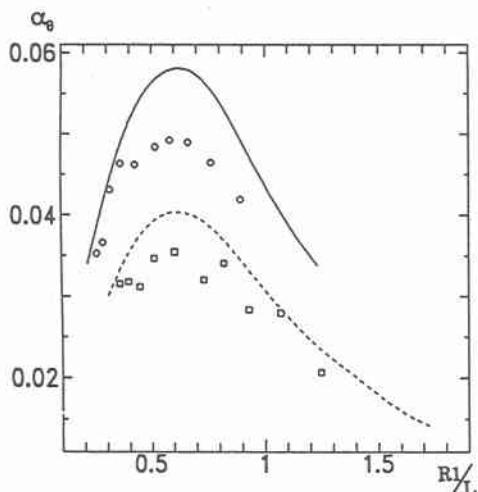


図8,  $R1/L$  の変化に伴う  $\alpha_\theta$  (発泡スチロール)

## 9. 考察

図4は、 $R1/L$ の値が小さいとき ( $R1/L=0.2 \sim 0.6$ )、解析値よりも実験値が小さくなっている。これは解析では考慮していない粘性の影響により、実験値に小さな値が出でたと思われる。 $R1/L$ の値が0.6以上のとき、解析値よりも実験値が大きな値を示しているのは、実験中、多少の質量輸送が波の進行方向に起こっていたために、正確な振幅をうまく測定できなかつた事によると思われる。

図5は、解析値、実験値共に  $R1/L$  が  $0.7 \sim 0.9$  にピークが見られる。これは浮体と入射波が共鳴していると考えられる。実験値が解析値よりも小さい値であるのは、粘性の影響であると思われる。

図6は、同様に  $R1/L$  が小さいところで、解析値より実験値が小さくなっている。これは粘性の影響と浮体の運動を元の位置（静止時の位置）で近似しているために生じる誤差であると考えられる。

次に浮体の材質が発泡スチロールの場合では、実験中、断面2次元水槽の内壁に浮体が接触する事があり、解析値との比較が十分に出来なかつたため、水平運動振幅の図の提示は省略した。鉛直・回転運動振幅は、多少、浮体が内壁に触れていても、水平運動振幅とは違い、浮体運動の復元力として水圧だけでなく重力も考えられ、内壁による摩擦力よりも強い復元力であると思われることから、解析結果と実験結果の比較を図7、図8として示した。

図7は、図5と異なり、振幅のピークが存在しない。これは発泡スチロールが軽い浮体であるために、共鳴現象が起こらなかつたものと思われる。

図8は、実験値、解析値共に  $R1/L=0.6$  付近でピークを持ち、共鳴していると思われる。

全ての図において、粘性の影響、質量輸送の影響により、解析値と実験値には多少の違いが見られたが、ほぼ一致しているものと考えられる。

## 10. まとめ

解析方法として、主要解ではなく Green 関数

を用いて解析した事により、未知数（ポテンシャル、振幅）の数が100以下となり、大幅な未知数の低減を可能にし、3次元問題を考えた時に有利であると考えられる。

解析結果、実験結果が、ほぼ一致していることから、解析方法の妥当性が認められた。

浮体運動は、浮体と波長などの関係から、あるところで共鳴現象が起こっていると考えられる。

今後、解析方法をより実際の現象に近くするために、浮体の運動に伴う浮体没水面の位置の移動を考慮した解析方法を考える必要がある。

実験方法は、水槽内壁に触れることのないように、工夫する必要があると思われる。

今回は、各振幅のみの測定であったが、浮体通過後の散乱波の測定も行う必要がある。

## 11. 参考文献

井島武志、田淵幹修、湯村やす (1972) : 有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変化、土木学会論文集、第202号、pp33-48

清川哲志、平山彰彦、高梨和光 (1983) : ハイブリット型境界要素法による任意反射率防波堤前面の浮体動揺解析、海岸工学論文集、第30回、pp450-454

榎木亨、青木伸一、濱本敏 (1988) : 港湾形状を考慮した港内船舶の回折・造波問題の解析、海岸工学講演会論文集、第35回、pp.692-696

清川哲志、大山巧、小林浩 (1993) : グリーン関数法による任意形状浮体の動揺解析、土木学会論文集、第332号、pp55-65

井島武志、吉田明德、山本督夫 (1978) : 任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形、土木学会論文集、第272号、pp53-63