

II-60

境界要素法を用いた波動場中の
円柱近傍の流れ構造について

北見工業大学 工学部 正員 佐藤 幸雄
北海道東海大学工学部 正員 浜 中 建一郎

I. まえがき

2次元の波動場中に円柱を波の進行方に対して直角かつ水平に没水させた状態で設置したとき、円柱の表面に剥離を伴うような場合の円柱表面の極く近傍における流れの状態および円柱に働く流体力に関して、昨年までは円柱の直径が比較的小さい場合として、円柱より遠く離れたところで与える流れ関数に対する境界条件に近似的に円柱が無いときの微小振幅波の流速成分を用いて計算を行なって来た。しかし、本来は、円柱の直径が小さくても、円柱の存在の有無により、円柱の近傍において流れの状況は異なることが考えられ、より正確な条件下での計算が必要である。このことから、本研究では波動場中に構造物が存在する場合、一般に用いられているグリーンの積分公式を使用した境界要素法により波動場の流れの状態を求め、つぎに求められた流れ場のポテンシャルを用いて、円柱近傍の流れ場を計算するための流れ関数に対する境界条件を設定する方法を取った。この方法により、円柱の極く近傍の流れの状態を見るため、渦度および流れ関数の値を数値解析により求め、さらに、円柱に働く水平方向の流体力についても若干の検討を行なった。

II. 数値解析

(1) ポテンシャル流の流れ場

円柱を取り囲む波動場をポテンシャル流と考え、つぎのようなグリーンの積分公式を用いた境界要素法により、流れ場のポテンシャル ϕ を求める。図-1に示すように、円柱を取り囲む境界上のポテンシャル $\phi'(x_0, z_0)$ に対するグリーンの積分公式は、

$$\phi'(x_0, z_0) = \frac{1}{\pi} \int_S \left\{ \phi'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) - (\log r) \frac{\partial \phi'(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right\} dS \quad \dots (1)$$

であり、また、領域内部のポテンシャル $\phi(x, z)$ に対しては、

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \phi'(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) - (\log r) \frac{\partial \phi'(\xi, \eta)}{\partial \nu} \right\} dS \quad \dots (2)$$

で与えられる。ここで、 (ξ, η) は境界上の点の座標で、 $\log r$ は2次元ラプラスの式の主要解、

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2}$ である。式(1)および(2)の右辺は境界Sに関する線積分を表す。

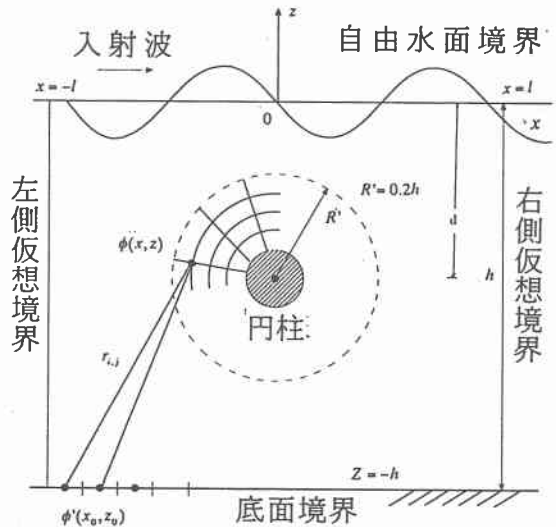


図-1 計算範囲

Flow Structure around a Circular Cylinder in Water Waves with Boundary Element Method ,
Yukio SATO and Ken-ichiro HAMANAKA

次に、図-1に示すように波動場を囲む5つの境界である底面、円柱表面、自由水面、左・右の仮想境界上を区間長 ΔS 、区間個数 N 個に分割して式(1)を離散化すると

$$\phi'(i) = \sum_{j=1}^N \{ \bar{E}_{i,j} \phi'(j) - E_{i,j} \hat{\phi}'(j) \} \Delta S_j \quad \dots (3)$$

となり、ここで

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial v} (\log r) ds = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial v} (\log r_{i,j}) \Delta S_j$$

$$E_{i,j} = \frac{1}{\pi} \int_S \log r ds = \frac{1}{\pi} (\log r_{i,j}) \Delta S_j \quad (4)$$

また、特に $i = j(x_0 \rightarrow \xi, z_0 \rightarrow \eta)$ のときは、 $\log r$ の主値積分を用いて、

$$E_{i,i} = \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{\Delta S_j}{2} - 1 \right) \Delta S_j, \quad \bar{E}_{i,i} = 0 \quad (5)$$

となる。

つぎに、表面波に微小振巾波を考慮して、各変量を各周波数 σ と重力の加速度 g により無次元化する。有次元量に“ $\hat{\quad}$ ”を付けて表すと、各無次元変量はそれぞれ、

$$(x, z) = (\hat{x}, \hat{z}) \sigma^2 / g,$$

$$(h, d, \eta) = (\hat{h}, \hat{d}, \hat{\eta}) \sigma^2 / g, \quad R_0 = \hat{R}_0 \sigma^2 / g,$$

$$t = \sigma \hat{t}, \quad (\phi, \psi) = (\hat{\phi}, \hat{\psi}) \sigma^3 / g^2, \quad \text{となり、}$$

無次元化された基本方程式および境界条件は、それぞれつぎのようになる。

速度ポテンシャルを $\Phi = \phi e^{i t}$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \phi \quad (z=0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \quad (z=-h) \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} &= 0 \quad (\text{円柱表面上}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

v ; 領域の外向き法線ベクトル, ϕ, ψ はそれぞれ速度ポテンシャルと流れ関数である。

また、左・右の仮想境界上のポテンシャルに減衰定在波を考慮して、左側仮想境界上では、

$$\phi_{-i-1} = e^{i t} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{n=1}^M a_n e^{-i t} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad \dots (7)$$

右側仮想境界上では

$$\phi_{-i-1} = \sum_{n=1}^M b_n e^{-i t} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \quad \dots (8)$$

M ; 散乱波の項数, をそれぞれ与えた。

式(7),(8)中の無次元波数 k, k_n に関する分散関係式は $k \tanh kh = 1, k_n \tanh k_n h = -1$ である。

以上の各式を使用して、境界上のポテンシャル ϕ に関する連立方程式を解いて、 ϕ を求めた。

さらに、領域内部のポテンシャル ϕ については、式(2)を同様に離散化して、境界上のポテンシャル ϕ を使用して、点 (x, z) の ϕ の値を一義的に求めることが出来る。

計算方法としては境界上の分割点数を、円柱上で4点、それ以外の境界上で100点の計104点とした。また計算範囲は水深 h の2割($R = 0.2h$)を半径 R とする円内に極座標で計算メッシュを設定した。 R 方向、 θ 方向のメッシュ間隔 Δr および $\Delta \theta$ は等間隔にとりそれぞれ64個である。

(2) 円柱近傍の流れ場

各変量を角周波数 σ と円柱の半径 R_0 により無次元化された、渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式はそれぞれ、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} + \nu \Delta \omega \quad \dots (10)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots (11)$$

である。

式(10)及び(11)を $x = e^r \cos \theta, z = e^r \sin \theta$ により $r-\theta$ に変換すると、渦度方程式は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \left[- \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad \dots (12)$$

ポアソン方程式は、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -J \omega \quad \dots (13)$$

ここで、 J ; Jacobian で $J=e^{2r}$ である。

つぎに、 r 方向には伸縮座標を使用して、

$$r = r_r \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad \dots(14)$$

と置き、 r を ζ に変換すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{e^b - 1}{br_r} e^{-b\zeta} = \zeta_1, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = -b(\zeta_1)^2 = \zeta_2$$

したがって、式(12)および(13)は、それぞれ、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J^{-1} \zeta_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - J^{-1} \nu \left\{ (\zeta_1)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\omega = -J^{-1} \left\{ (\zeta_1)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right\} = 0$$

のようになる。 $\dots(16)$

式(15)及び(16)に対する境界条件は、 $\phi(r, \theta)$ 、 $\psi(r, \theta)$ に関するコーシーリーマンの方程式は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \dots(17)$$

であり、円柱より遠く離れた境界層外縁 R_T における流れ関数 ψ に対する条件は式(17)の第1式を使用することとする。

また、 $R_T = e^r$ において、 $\omega = 0$

円柱表面上においては“non-slip”の条件より、 ψ に対しては、

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

渦度 ω に対しては Thom の式を用いて

$$\omega = -J^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left\{ \frac{2\psi(\Delta \zeta)}{(\Delta \zeta)^2} \right\}$$

圧力場については圧力方程式、

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} \quad \dots(18)$$

$$p = \hat{p} / \rho (\sigma R_0)^2, \quad \rho; \text{流体の密度}$$

を使用した。圧力 p に対する境界条件は、円柱表面

$$\text{上で、} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

円柱より遠く離れた境界層外縁ではポテンシャル流の圧力を与えるものとして、

$$\Phi = \phi e^{it} \quad \text{より、}$$

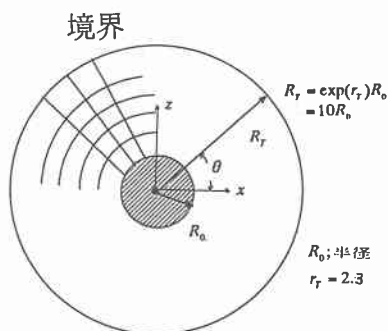


図-2 円柱近傍の計算範囲

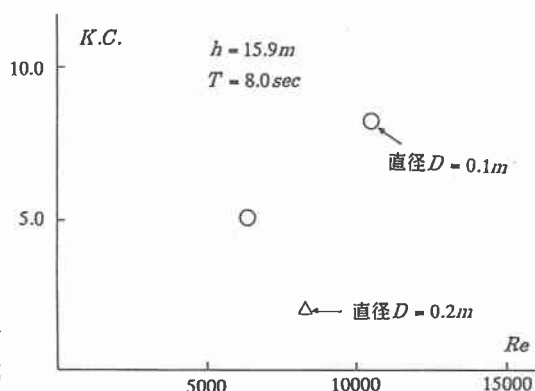


図-3 計算条件

表-1 計算条件

	円柱の直径 D(m)	波高 H(m)	K.C数	Re数	α	ν
CASE-1	0.1	0.21	5.1	6400	2.1	0.000510
CASE-2	0.1	0.34	8.3,	10500	3.4	0.000510
CASE-3	0.2	0.16	2.0	8500	0.8	0.000127
水深h=15.9m, 没水深d=7.9m, 周期T=8.0sec, 計算回数 3cycles						

$$p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\phi e^{it} \quad \dots(19)$$

である。

計算方法は、

図-2に示すように、円柱より遠く離れた境界層外縁の位置 R_T を円柱の半径 R_0 の10倍程度に仮定し、 $R_T = 10R_0 = e^r R_0$ ($r_T=2.3$)とした。 R_T までの間に設定した計算メッシュは θ 方向に64個、 r 方向(ζ 方向)に64個である。計算手順はまず、II.のポテンシャル流の解析によって得られた領域内の各メッシュ上の ϕ の値の中より境界 R_T の位置

に相当する ϕ を取り出し、境界 R_T 上の流れ関数に対する境界条件である $\partial\psi/\partial r$ の値を式(17)の第1式を次のような中心差分により求めた。

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_i = \frac{1}{R_T}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})/2 \cdot \Delta\theta$$

また、境界 R_T 上の圧力 p の値は同様に ϕ の値を使用し、式(19)により求めた。これらの境界条件 $\partial\psi/\partial r$ 、および p の値は計算の時間ステップ Δt 毎に求めることとなり、したがってポテンシャル流の流れ場自体を Δt 毎に計算する必要がある。

ここで、ポテンシャル流における $\partial\psi/\partial r$ および p は σ, g による無次元量であるため、これらを σ, R_0 で無次元化し直した $(\partial\psi/\partial r)^*$ および p^* を使用する必要がある。この場合は

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^* = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{g}{\sigma^2 R_0}\right)$$

$$p^* = p \left(\frac{g}{\sigma^2 R_0}\right)^2 \text{ となる。}$$

III. 計算条件

計算条件は表-1 に示すように、ポテンシャルに対しては、有次元量で水深 $h=15.9$ m、周期 $T=8.0$ sec、円柱の没水深 $d=7.9$ m ($=h/2$) で一定とし、波高は CASE-1, 2 および 3 の場合、それぞれ $H=0.21, 0.34$ および 0.16 m である。円柱の直径は CASE-1, 2 が $D=0.10$ m、CASE-3 が $D=0.20$ m である。

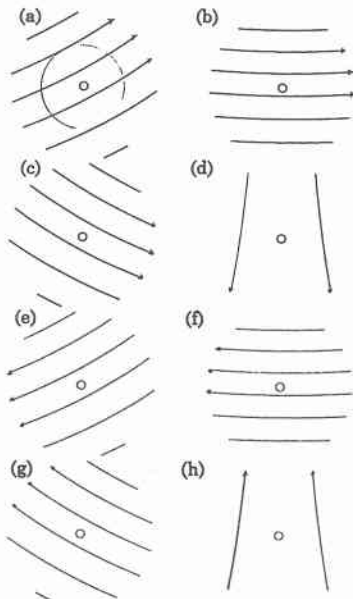


図-4 流れ関数の Contours
CASE-1 (ポテンシャル流)
K.C=5.1 Re=6400

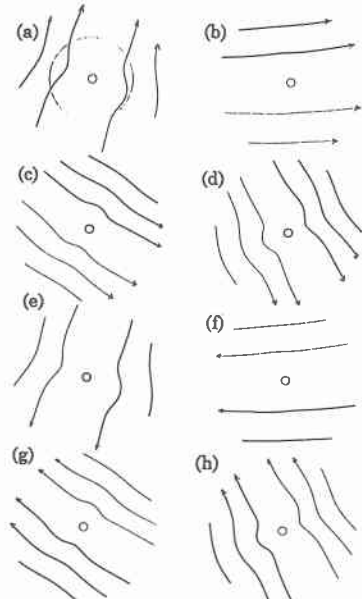


図-5 流れ関数の Contours
CASE-1 (数値解析)
K.C=5.1 Re=6400

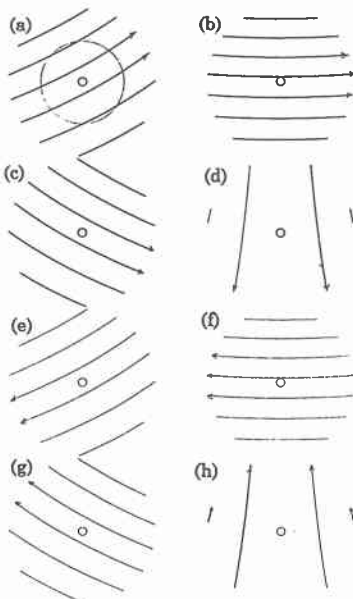


図-6 流れ関数の Contours
CASE-2 (ポテンシャル流)
K.C=8.3 Re=10500

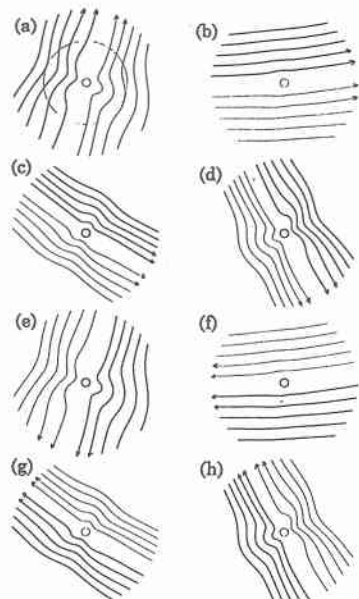


図-7 流れ関数の Contours
CASE-2 (数値解析)
K.C=8.3 Re=10500

円柱近傍の計算条件も表-1 に示した通りで、計算回数は 3cycles 行なった。各 CASE について K.C 数は小さいが、Re 数は比較的大きい場合といえる。計算 CASE を K.C 数と Re 数の関係で図示したものが図-3 であり CASE-1, 2(D=0.1m)は○印、CASE-3(D=0.2m)は△印である。

ここで、

$$\text{K.C 数} = \pi\alpha \cdot \frac{\cosh k(-d+h)}{\sinh kh}$$

$$\text{Re 数} = \frac{2\alpha}{v} \cdot \frac{\cosh k(-d+h)}{\sinh kh}$$

である、K.C 数および Re 数中で使用される流速成分には、円柱上を通過する波の振幅が α で、円柱の没水深 d の位置における微小振幅波の水平方向流速成分の最大値 u_{\max} を使用することとした。

なお、計算ステップ Δt は $\Delta t = 2\pi / \text{NNT}$, $\text{NNT} = 4000$ である。

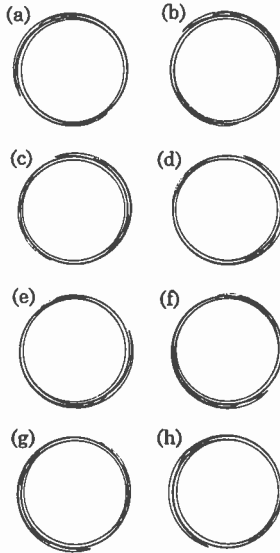


図-8 渦度の Contours

CASE-1 (数値解析)
K.C=5.1 Re=6400

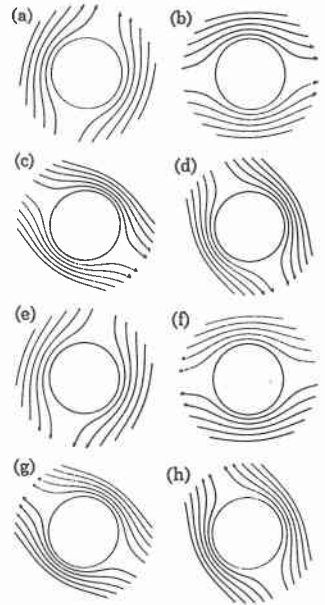


図-9 流れ関数の Contours

CASE-1 (数値解析)
K.C=5.1 Re=6400

IV. 計算結果と考察

図-4 および図-6 は CASE-1 および CASE-2 の場合の微小振幅波の流れ関数を使用して計算した流れ関数の Contours (流線) を示したものである。したがって、図中の円柱を示す○印は仮想的に示したもので実際は不要である。図-6 は図-4 の若干流速が速い場合の Contour 図である。図-5 は図-4 と同じ計算条件の円柱が存在する場合の流れ関数の Contours であり、円柱近傍で流れが円柱を避けて流れている様子が分かる。図-7 は図-5 の若干流速が速い場合に相当している。図-7 においても図-5 と同様に円柱のまわりの流線が変化しているのが見られる。各図中に示した (a)~(h) の図は 1 周期(2π) を 8 等分して、 $2\pi/8$ づつ位相が変化した時の状態を示したものである。したがって、(a)~(d) の図と (e)~(h) の図はほぼ対象な図となっている。なお、各図中の (a) 図の上に

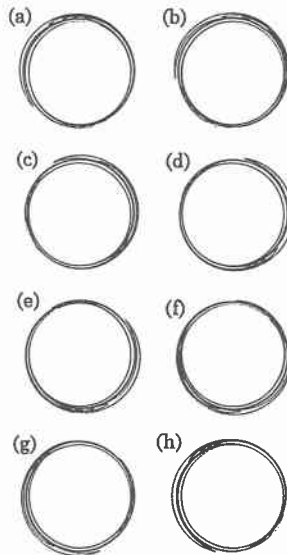


図-10 渦度の Contours

CASE-2 (数値解析)
K.C=8.3 Re=10500

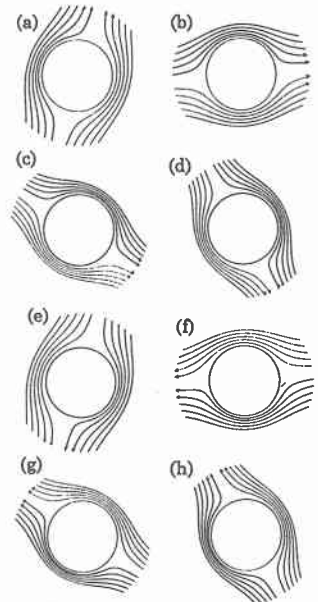


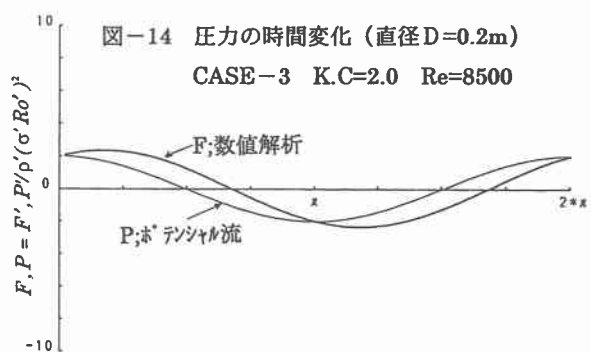
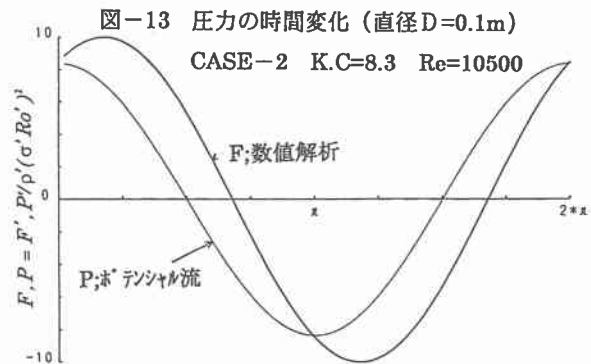
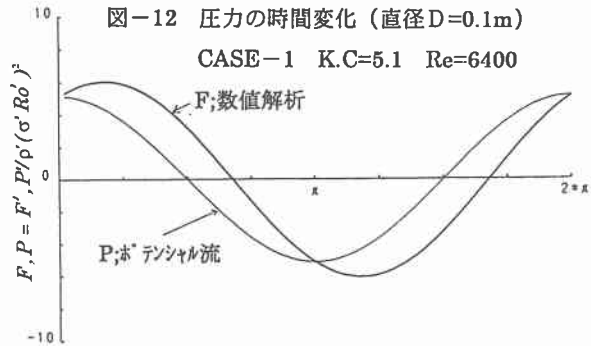
図-11 流れ関数の Contours

CASE-2 (数値解析)
K.C=8.3 Re=10500

円柱を示す小さな円の外側にやや大き目の円を描いているが、この円は円柱の半径の10倍の位置、すなわち境界層外縁の境界条件を採用した R_T の位置を示したものであり、この R_T の位置で、微小振幅波の場合と円柱が存在している場合の例えば図-6 と図-7 を比べて見ても流線は確かに異なっているのが分かる。

つぎに、図-8~図-11 はII. (2)で述べた方法により R_T の位置の境界条件を使用して求めた円柱近傍の渦度および流れ関数の Contours を示したもので、図-8 は CASE-1 ($K.C=5.1$, $Re=6400$) の場合であり、円柱表面に極く僅か剥離渦が発生しているのが見られる。この剥離渦の発生する位置は(a)~(h)の位相の変化にしたがって円柱の表面を時計回りに回転しているのが見られる。図-9 は図-8 と同じ計算条件の流れ関数の Contours であり、 $K.C$ 数が小さいこともあり、ほぼポテンシャル流に近い流線となっている。しかし、(a), (d), (e)および(h)において微小振幅波の場合と位相がずれているのが特徴である。図-10 および図-11 は、図-8, 図-9 よりやや流速が速い場合に相当した CASE-2 ($K.C=8.3$, $Re=10500$) のときの渦度および流れ関数の Contour 図を示したものである。渦度および流れ関数に CASE-1 と全体的には類似の様子を示しているが、若干渦度が強く、流れが速い状態を示しているのが分かる。

CASE-1, 2, 3について流体力 F の水平方向成分を1周期間の時間変化について、図-12, 13, 14 に示した。各 CASE 共にポテンシャル流の場合の P の曲線と同様な傾向を示しているが数値計算の場合は図-9, 10 の流れ関数の Contours においても見られるように、位相にずれを生じていることと、剥離渦の影響によりポテンシャル流の場合より最大値がやや大きい値を示しているのが特徴である。



V. まとめ

境界要素法により求められた境界条件を使用して円柱近傍の流れ場の数値計算を行なったが、 $Re=6400\sim 10500$ の比較的大きい場合についても数値計算は発散せず解が求まることが分かり、今後は、 $K.C$ 数、 Re 数の拡大さらに円柱の径が大きい場合について計算可能な範囲を見出すことを考えている。

<参考文献>

- 佐藤幸雄・渡部靖憲(1996):水平振動流中の円柱の表面に剥離を伴う場合の流体力について, 海岸工学論文集, 第43巻 pp.911-915
 奥村慎也・佐藤幸雄・渡部靖憲(1995):波動場中の円柱のまわりの流れ構造について, 海岸工学論文集, 第42巻 pp.831-835