II－52

河川における水面波の相互干渉に関する研究

学生員　土井寛史
正　員　森　明巨
ﾌｪﾛｰ員　板倉忠興

1. はじめに

河川において水面波は砂堆や反砂堆などの河床波と強く干渉し合っている。本研究では特に、山地河川や流れの速い河川における、移動床と水面波との相互干渉の構造を調べる。そのため非定常解析とした。移動床の移動速度は遅く、水面波の波速が速い場合は、それほど大きな干渉があるとは思われない。そこで、本研究では、ごく遅い波速の水面波もしくは定在する水面波が存在する条件における流れの構造、および水面波と河床波の相互干渉について検討する。また、これらを理論的に調べるために三次元非定常解析を行った。解析方法は、境界条件の取り扱いを容易にするために水面形にあわせた座標系を用い、非定常解析は、Warsi の方法[1]を用いた。

2. 水面での条件

Warsi の方法における移動座標の速度を考えると、次の 3 つの座標系が使われる。$A.(y^j,t)$ ：カーテシアン座標系、$B.(\xi^j,\tau)$ ：移動座標系、$C.(x^j,t)$ ：移動座標系を移動先で固定した座標系。この時、$\partial x^j = \partial \xi^j$ であるからＢ座標系とＣ座標系の基本ベクトルは同じで $\mathbf{g}_j = \partial \mathbf{r} / \partial x^j = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^j$ となる。

ここで、以下の 4 つの速度を導入する (テンソル記号[2]は慣用のものを用いる)。

Ａ座標系上でのＰ点の速度　：　$\mathbf{u} = \mathbf{e}_j \dfrac{\partial y_p{}^j}{\partial t}$　(2-1)

Ｂ座標系上でのＰ点の速度　：　$\mathbf{v} = \mathbf{g}_j \dfrac{\partial \xi_p{}^j}{\partial \tau}$　(2-2)

Ｃ座標系上でのＰ点の速度　：　$\mathbf{u} = \mathbf{g}_j \dfrac{\partial x_p{}^j}{\partial t}$　(2-3)

Ｃ座標系上の固定点におけるξ^jの変化速度　：　$\mathbf{w} = \mathbf{g}_j \dfrac{\partial \xi^j}{\partial t}$　(2-4)

また、ここに $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ という関係がある。

本研究において、$A.(y^j,t)$ 座標系と $C.(x^j,t)$ 座標系の関係は次式で与えられる。ここで上付き添え字１は流下方向、添え字２は横断方向、添え字３は鉛直上向き方向とする。また、河床を$x^3=0$、水面を$x^3=1$、水路左岸を$x^2=0$、右岸を$x^2=1$とする。

$$y^1 = \lambda x^1 \ 、\ y^2 = bx^2 \ 、\ y^3 = hx^3 + \eta \qquad (2\text{-}5)$$

ここで、λ ：y^1 方向の特性長、b ：水路幅、η ：河床高。このとき w は、

$$\mathrm{w}^1 = 0 \ 、\ \mathrm{w}^2 = 0 \ 、\ \mathrm{w}^3 = \frac{\partial x^3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{y^3-\eta}{h} = -\frac{y^3-\eta}{h^2}\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{x^3}{h}\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (2\text{-}6)$$

Analysis of Interaction of Surface Waves in a River
by Hiroshi Doi, Akio Mori and Tadaoki Itakura

自由水面の運動学的条件は、水面粒子の座標が次式を満たすことである、つまり

B 座標系： $$F\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\tau\right)=h\left(\xi^1,\xi^2,\tau\right)-h\left[\xi^1,\xi^2=\text{constant}\right]\xi^3=0 \tag{2-7}$$

C 座標系： $$F\left(x^1,x^2,x^3,t\right)=h\left(x^1,x^2,t\right)-h\left[x^1,x^2,t=\text{constant}\right]x^3=0 \tag{2-8}$$

これは、（Ｆの実質微分）=0 を意味する。このとき B、C 座標系の保存則は、

B 座標系： $$\frac{\partial h}{\partial \tau}-\frac{\partial h}{\partial \tau}\xi^3-h\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^1\frac{\partial h}{\partial x^1}+\mathrm{v}^2\frac{\partial h}{\partial x^2}=0 \tag{2-9}$$

C 座標系： $$\frac{\partial h}{\partial t}-h\mathrm{u}^3+\mathrm{u}^1\frac{\partial h}{\partial x^1}+\mathrm{u}^2\frac{\partial h}{\partial x^2}=0 \tag{2-10}$$

水面では、 $\xi^3=x^3=1$、 $\mathrm{v}^3=0$ であるから

B 座標系： $$\mathrm{v}^1\frac{\partial h}{\partial x^1}+\mathrm{v}^2\frac{\partial h}{\partial x^2}=0 \tag{2-11}$$

C 座標系： $$\frac{\partial h}{\partial t}-h\mathrm{u}^3+\mathrm{u}^1\frac{\partial h}{\partial x^1}+\mathrm{u}^2\frac{\partial h}{\partial x^2}=0 \tag{2-12}$$

(2-11)－(2-12)から、

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\mathrm{w}^3-\mathrm{w}^1\frac{\partial h}{\partial x^1}-\mathrm{w}^2\frac{\partial h}{\partial x^2}=0 \tag{2-13}$$

$\mathrm{w}^1=0$、$\mathrm{w}^2=0$ であるから、$\mathrm{w}^3=\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial t}$ となる。このとき $\mathrm{u}^3=\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial t}$ である。

3. 基礎方程式

移動座標系における保存則は、次のように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}+\left(\mathrm{Aw}^i+\mathbf{f}^i\right)_{,i}-\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{g}}}{\partial t}=0 \tag{3-1}$$

また、発散は一般に $$div\mathbf{f}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{g}}\mathrm{f}^j}{\partial \xi^j} \tag{3-2}$$

と書けるので、 $$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{g}}\mathrm{A}}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{g}}\left(\mathrm{Aw}^i+\mathrm{f}^i\right)}{\partial \xi^j}=0 \tag{3-3}$$

となる。ここで連続式は、$\mathrm{A}\to\rho$、$\mathrm{f}\to 0$ であり、運動方程式は、$\mathrm{A}\to\rho\mathrm{u}^i\mathbf{g}_i$、$\mathrm{f}\to\left\{\rho\mathrm{u}^i\left(\mathrm{u}^j+\mathrm{w}\right)-p\delta^{ij}\right\}\mathbf{g}_i$ とおいたときに得られる。

運動方程式　：　$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\rho \mathrm{u}^i \mathrm{g}_i}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\left[\rho \mathrm{u}^i\left(\mathrm{u}^j+\mathrm{w}^j\right)-p\delta^{ij}\right]\mathrm{g}_i}{\partial x^j}=0 \tag{3-4}$$

連続式　：　$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\rho\left(\mathrm{u}^j+\mathrm{w}^j\right)}{\partial x^j}=0 \tag{3-5}$$

非回転の条件式　：　$$\mathrm{u}_{i,j}=\mathrm{u}_{j,i} \tag{3-6}$$

ここで、$p=\tilde{p}/\rho+g'z$、$\tilde{p}$ ：圧力、ρ ：密度、g' ：重力加速度。以下では簡単のために$x^1=x$、$x^2=y$、$x^3=z$と書くことにする。また、 x、y、z 方向の運動方程式を(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)、 連続式を(ⅳ)、 x、y、z 軸回りの非回転の条件式を(ⅴ)、(ⅵ)、(ⅶ)と呼ぶ。Friedrichs の浅水流理論[3]に従いu^1、u^2、u^3、h、b、p、ηを次のように無次元化する。

$$U=\frac{\lambda}{\sqrt{g'd}}\mathrm{u}^1、V=\frac{b\lambda}{\sqrt{g'dd}}\mathrm{u}^2、W=\frac{hd}{\sqrt{g'd}\lambda}\mathrm{u}^3、H=\frac{h}{d}、B=\frac{b}{d}、P=\frac{p}{g'd}、N=\frac{\eta}{d}$$

ここで、d ：代表水深。水面と河床と両岸での境界条件は以下のようになる。

$$\begin{array}{lll} W=0 & \text{at} & z=0 \ \text{and} \ 1、\\ P=H+N & \text{at} & z=1 \\ V=0 & \text{at} & y=0 \ \text{and} \ 1 \end{array}$$

H、U、V、W、P を以下のように微少パラメータσで摂動展開[4]する。$\sigma=\left(d/\lambda\right)^2$。

$$H=H_0+\sigma H_1+\sigma^2 H_2\cdots\cdots \tag{3-7}$$

また、河床波の波高は水面波や水深と比べ小さいことから$N=\sigma^2 N_2$とした。
　次に、高次（σの１次、２次）において解を得るために次のような座標変換をする。

$$\left(x,y,z,t\right)\rightarrow\left(\hat{x}+ct,y,z,t\right) \tag{3-8}$$

新しい座標系は、流下方向に c の速度で移動するものである。さらにσの２次のオーダーで現れる永年項を消去するために、この$\hat{x}$座標を次のように変換する。

$$\hat{x}\rightarrow s\left(1+\sigma\zeta\right) \tag{3-9}$$

ここで、sが新たな流下方向の座標で、ζがある値をとると永年項の一つが消去される。
　以上の展開を基礎方程式に施し、各オーダーごとに解を求める。

4. σの−１次のオーダー

　連続式から次の式が得られる。

$$W_{0,z}=0 \tag{4-1}$$

よって　$$W_0=0 \tag{4-2}$$

5. σの０次のオーダー

ここで、無限遠では定常であることを考えると、少なくとも０次のオーダーにおいて定常の解は存在する。そこで今回は、０次のオーダーは定常であるとする。つまり、（非定常項）＝０。またこのとき、$W_1 = 0$である。

よって、式(i)から

$$E_0 = H_0 + \frac{U_0^{\ 2}}{2} = \text{constant} \tag{5-1}$$

また、$W_1 = 0$、$V_0 = 0$であるから式(iv)より

$$Q_0 = H_0 U_0 = \text{constant} \tag{5-2}$$

式(5-1)、(5-2)の関係を満たすU_0、H_0は、

$$U_0 = \text{constant}、H_0 = P_0 = \text{constant} \tag{5-3}$$

6. σの１次のオーダー

式(i)〜式(vii)から最終的に次の方程式が得られる。

$$\beta^2\left(H_0 - U_0^{\ 2} - c^2 + 2cU_0\right)V_{1,ss} + H_0 V_{1,yy} - \beta^2 V_{1,tt} + 2\beta^2\left(c - U_0\right)V_{1,st} = 0 \tag{6-1}$$

ここで、$c = U_0$ とき、式(6-1)は

$$V_{1,tt} - H_0 V_{1,ss} - \frac{H_0}{\beta^2}V_{1,yy} = 0 \tag{6-2}$$

この時の波速は、$\left(波速\right) = \sqrt{H_0} = \sqrt{\frac{h}{d}}$ (6-3)

7. σの２次のオーダー

式(i)〜式(vii)より、最終的に次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\widetilde{V}_{2,tt} - H_0\widetilde{V}_{2,ss} - \frac{H_0}{\beta^2}\widetilde{V}_{2,yy} \\
&= -\beta N_{2,yt} - \frac{1}{2\beta}\left(U_1^{\ 2}\right)_{,yt} + \frac{2}{H_0}\left(V_1 H_{1,t}\right)_{,t} - 2\frac{U_0}{H_0}\left(V_1 H_{1,s}\right)_{,t} + \frac{1}{\beta}\left(H_1 U_1\right)_{,sy} \\
&\quad + \frac{1}{\beta^2}\left(H_1 V_1\right)_{,yy} + \frac{H_0^{\ 2}}{\beta}\left[\int_0^1\left(\int W_{2,s}dz\right)_{,s}dz\right]_{,y} + \frac{H_0^{\ 2}}{\beta^3}\left[\int_0^1\left(\int W_{2,y}dz\right)_{,y}dz\right]_{,y} \\
&\quad - \frac{1}{3}H_0 U_0 V_{1,sss} - 2\zeta H_0 V_{1,ss} + \zeta U_0 V_{1,st}
\end{aligned} \tag{7-1}$$

ここで、$\widetilde{V}_2$ ：水面における横断方向の流速。

8. σの１次のオーダーの解

式(6-2)の解は、まず$V_1 = e^{ik_y y}\cos(k_x s - \omega t)$ とおき[5]式(6-2)に代入すると、

$$\left(-\omega^2 + H_0 k_x^{\ 2} + \frac{H_0}{\beta^2}k_y^{\ 2}\right)e^{ik_y y}\cos(k_x s - \omega t) = 0 \tag{8-1}$$

よって、$k_y=\sqrt{\dfrac{\beta^2}{H_0}\left(\omega^2-H_0k_x{}^2\right)}$。また、境界条件より、$y=1$のとき$V_1=0$となるためには、

$$k_y=\sqrt{\frac{\beta^2}{H_0}\left(\omega^2-H_0k_x{}^2\right)}=j\pi \tag{8-2}$$

これから、$k_x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{H_0}\left(\omega^2-j^2\pi^2\dfrac{H_0}{\beta^2}\right)}$となる。結局式(6-2)の解は、

$$V_1=\alpha_1\sin(j\pi y)\cos(k_xs-\omega t) \tag{8-3}$$

ここで、α_1：振幅。また、このときH_1、P_1、U_1は次のようになる。

$$H_1=P_1=\frac{\beta\omega}{j\pi}\alpha_1\cos(j\pi y)\sin(k_xs-\omega t) \tag{8-4}$$

$$U_1=\frac{\beta k_x}{j\pi}\alpha_1\cos(j\pi y)\sin(k_xs-\omega t) \tag{8-5}$$

9. σの２次のオーダーの解

式(7-1)の右辺には２つの永年項が含まれている。この永年項は、まず１次のオーダーの解を代入すると、

$$\zeta=\frac{H_0U_0\omega^3}{3(2k_x+U_0\omega)} \tag{9-1}$$

のとき永年項の一つが消去され、更に

$$W_2=\mathrm{a}z\cos2(j\pi y)\sin2(k_xs-\omega t) \tag{9-2}$$

のとき残りの一つが消去される。ここで、式(9-3)のとき式(7-1)は最終的に式(9-4)となる。

$$\mathrm{a}=\left[\alpha_1{}^2\omega\left\{\frac{1}{2}\beta k_x-\frac{\beta\omega^2}{j\pi H_0}-\frac{\beta k_x\omega^2U_0}{j\pi H_0}-\frac{k_x{}^2}{j\pi}-\frac{j\pi}{\beta}\right\}\right]\Bigg/\left[\frac{8}{3}j\pi\frac{H_0{}^2}{\beta}\left\{k_x{}^2+\frac{j^2\pi^2}{\beta^2}\right\}\right] \tag{9-3}$$

$$\tilde{V}_{2,tt}-H_0\tilde{V}_{2,ss}-\frac{H_0}{\beta^2}\tilde{V}_{2,yy}=-\beta N_{2,yt} \tag{9-4}$$

ここで、非斉次項である$N_2=0$であるとき、つまり平坦床のとき２次のオーダーの解を求めると、

$$\begin{aligned}V_2=&\left\{\alpha_2-j\pi\frac{H_0}{\beta}\mathrm{a}\left(z^2-1\right)\right\}\sin2(j\pi y)\cos2(k_xs-\omega t)\\&-\frac{z^2-1}{2}H_0U_0\beta\omega k_x\alpha_1\sin(j\pi y)\cos(k_xs-\omega t)\end{aligned} \tag{9-5}$$

$$U_2=\frac{k_x}{j\pi}\left\{\alpha_2-j\pi\frac{H_0}{\beta}\mathrm{a}\left(z^2-1\right)\right\}\cos 2(j\pi y)\sin 2(k_x s-\omega t)$$
$$-\frac{k_x}{j\pi}\beta\left(\frac{z^2-1}{2}H_0U_0\beta\omega k_x+\zeta\right)\alpha_1\cos(j\pi y)\sin(k_x s-\omega t) \tag{9-6}$$

$$P_2=\frac{1}{j\pi}\left\{\alpha_2-j\pi\frac{H_0}{\beta}\mathrm{a}\left(z^2-1\right)\right\}\cos 2(j\pi y)\sin 2(k_x s-\omega t)$$
$$-\frac{z^2-1}{2}H_0U_0\beta^2\omega^2\frac{k_x}{j\pi}\alpha_1\cos(j\pi y)\sin(k_x s-\omega t) \tag{9-7}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1}{j^2\pi^2}\beta^2\left(\frac{1}{2}k_x{}^2-\frac{1}{H_0}\omega^2-\frac{U_0}{H_0}k_x\omega\right)\alpha_1{}^2\cos 2(j\pi y)\left[1+\cos(k_x s-\omega t)\right]$$

$$H_2=\frac{1}{j\pi}\alpha_2\cos 2(j\pi y)\sin 2(k_x s-\omega t)$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1}{j^2\pi^2}\beta^2\left(\frac{1}{2}k_x{}^2-\frac{1}{H_0}\omega^2-\frac{U_0}{H_0}k_x\omega\right)\alpha_1{}^2\cos 2(j\pi y)\left[1+\cos(k_x s-\omega t)\right] \tag{9-8}$$

ここで、α_2：振幅。

10. 考察

上記のように移動座標系における解析では、式(7-1)の右辺の二つの永年項は、(3-8)の座標変換によりζを(9-1)のように与えることによってその一つが消去され、更にW_2が式(9-2)とするとき残りの永年項を消去することができた。

また、1次の解(式(8-3))と2次の解(式(9-5))からわかるように、2次の解は1次の解の高調波となっている。更に、式(9-4)の右辺の$-\beta N_{2,yt}$を固定座標系から見ると$-\beta N_{2,xy}$である。このことは、固定座標系から見た三次元河床波が、2次の高調波と同調し波高を増幅させる可能性があることを示している。これらの結果は、長谷川等[6]のリブ(二次元河床形)とステッププール(三次元河床形)に関する考えを支持している。長谷川等は、射流において水面波の影響によって三次元河床波がつくられると考え、これがつくられると、更にその河床波と水面波とが干渉し、水面は振幅が非常に大きくなるり、その一方で、二次元河床波上の三次元的水面波は速やかに減少することを示している。

参考文献

1) Z.U.A.Warsi：AIAA JOURNAL：Conservation Form of the Navier-Stokes Equations in General Nonsteady Coordinates
2)横道英雄：工学系のためのテンソル解析、技報堂出版、1983年
3) E.V.Laltone：The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech. ,vol. 9,1961
4)川原琢治：ソリトンからカオスへ　非線型発展方程式の世界、朝倉書店
5)犬井鐵郎：偏微分方程式とその応用　応用数学講座　第9巻、コロナ社
6)長谷川和義：底面起伏を持つ水路における射流の特徴；都市域急流河川の流れと河床変動の数値解析に関するシンポジウム、平成6年