

II-51

MAC法を用いた障害物周辺の流れ

北海道開発局開発土木研究所	正員	池崎 慎二
北海道大学大学院工学研究部土木工学科	正員	清水 康行
北海道開発局開発土木研究所	正員	馬場 仁志
北海道開発局開発土木研究所	正員	山下 彰司

1, はじめに

河川法の改正により治水機能に加えて環境機能が重視されつつある。河川構造物が流れに与える3次元的影响は今まで主として水理実験等で行ってきたが、費用がかかるため、安価で簡便な方法が必要とされてきている。近年、パーソナルコンピュータの普及や、高精度化などで、複雑な局所急変流の現象や内部機構について水理モデルによる数値解析、及びシミュレーションが盛んに行われている。本研究では3次元計算への第1歩として鉛直2次元モデルを用いて床止め近傍の流れを解析し、床止めの水理実験の水理条件を引用し再現された計算結果と実験結果を具体的な現象比較で基礎的検討を行うものである。

2, 基礎方程式

流体運動を表現する2次元の基礎方程式は次の式で表わされる。

・連続の式 (質量保存の式)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

・運動方程式 (運動量保存の式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = gx - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = gy - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \quad \text{--- (3)}$$

x, y; 平面の直角軸、u, v; x, y方向の流速、g x, g y; x, y方向の単位質量当りの体積力、re; レイノルズ数

3, 差分方程式及び数値計算の方法

本研究では基礎方程式である連続の式及びx, y方向の運動方程式を、MAC法 (marker and cell) によって解いている。MAC法とは、カリフォルニア大学ロス・アラモス研究所のHarlowやWelchらによって自由表面をもつ非定常の流れについての基礎的な数値解法でMAC法で解くために、偏微分方程式で表示された基礎方程式をスタッガードメッシュで格子分割された計算領域で差分方程式により解くことを考えると、圧力についての差分方程式にするために下記のように(2)式をxに関して偏微分をおこない。また、同様に(3)式をyに関して偏微分を行う。これを辺々加算してとすると、下記の式になるこれが求めるPOISSONの方程式とよばれるもので $d = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ とすると式は下記になりこの式を差分方程式化する

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p = -\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{1}{re} d \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial d}{\partial t}$$

stay on flow around structure by mac-method

by Shinji Ikezaki, Yasuyuki Shimizu, Hitoshi Baba, Shioji, Yamashita

と圧力をもとめる POISSON の方程式ができこれにより既知条件をの与えたと関係式から圧力が求まる。

$$\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{dy^2} = \frac{(u_{i+1,j})^2 - 2(u_{i,j})^2 + (u_{i-1,j})^2}{dx^2} - \frac{(v_{i,j+1})^2 - 2(v_{i,j})^2 + (v_{i,j-1})^2}{dy^2} \\ - \frac{(u_{i+1,j+1})(v_{i+1,j+1}) - (u_{i+1,j})(v_{i+1,j}) - (u_{i,j+1})(v_{i,j+1}) + (u_{i,j})(v_{i,j})}{dx \times dy / 2} + \frac{d_{i,j}}{dt} + \frac{1}{re} \left\{ \frac{d_{i+1,j} - 2d_{i,j} + d_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{d_{i,j+1} - 2d_{i,j} + d_{i,j-1}}{dy^2} \right\}$$

次に x, y 方向の運動方程式を差分方程式にするため、式(2)の内、移流項以外の項を差分方程式にする

$\frac{\partial u}{\partial t}$: 非定常項、 $\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}\right)$: 移流項、 gx : 体積力項、 $\frac{\partial p}{\partial x}$: 圧力勾配項、 $\frac{1}{re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$: 粘性項

$$\partial u = \partial t \left\{ - \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) + gx - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\}$$

$$u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n = -dt \times (x \text{方向の移流項}) + dt \times gx - dt \times \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{dx} \right) + \frac{dt}{re} \left\{ \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(dx)^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{(dy)^2} \right\}$$

移流項については中心差分ではなく、ドナー・セル(donor cell)法(流れ込んでくる平均流速ベクトルで上流下流を決め上流側の値を利用して差分近似する風上差分)という方法をでおこなう。

$$(x \text{方向の移流項}) = \frac{1}{2dx} \left\{ \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i+2,j}) \times (u_{i+1,j} + u_{i+2,j}) + \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i+2,j}) \times (u_{i+1,j} - u_{i+2,j}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{i+1,j}) \times (u_{i,j} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{i+1,j}) \times (u_{i,j} - u_{i+1,j}) \right\} \\ + \frac{1}{2dy} \left\{ \frac{1}{2} (v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}) \times (u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2} (v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}) \times (u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{i+1,j}) \times (u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j}) - \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{i+1,j}) \times (u_{i+1,j-1} - u_{i+1,j}) \right\}$$

y 方向の運動方程式も上記同様に差分方程式化しこれらにより差分格子点上の p, u, v の値を計算する。計算上の格子点及び計算点を図-2 に示す。また、dx, dy を図-3 に示すように定義するまた時間ステップ dt の間に流体の移動距離がセル寸法を越えないように計算する CFL 条件を守るように計算させマーカーの発散を防ぎながらステップ更新する。

3、計算条件と境界条件(壁面および水面)

計算には図-5 のような床止め工を考え 3 2 × 2 0 のメッシュをほどこした。初期条件として x 方向に対数則をもった流速分布をあたえ、水面は固定表面とし流れを再現計算した。壁面条件及び流入条件詳細は次

頁に示す。壁の外側に空セルを設け連続の式の差分式 $d_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{dx} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{dy} = 0$ を満たすように

壁条件を設定する。

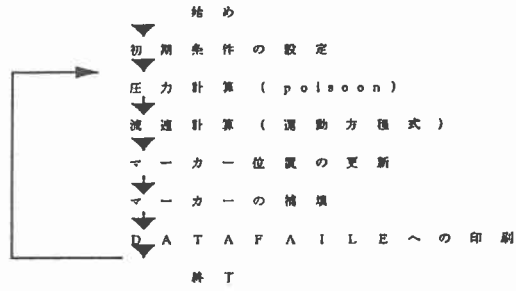
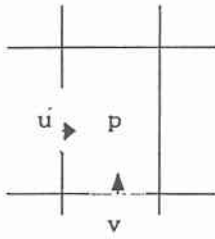


図-1 スタッガード格子 図-2 フローチャート図

計算条件 h (上流側水深) = 0.01 h_s (ステップ高さ) = 0.068m

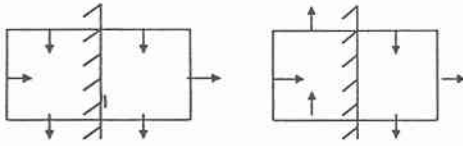
U_{max} (最大流速) = 57.2 cm/s U_m (平均流速) = 0.367 cm/s Re (レイノルズ数) = 25000

流入部 流速分布 $\frac{u}{u^*} = 8.5 + 5.75 \log_{10} \frac{y}{k}$

: 式に従う対数則分布、摩擦速度、河床粗度は計算による算出仮定。

k : 河床粒径 y : 計算点の水位 u : 計算点の流速, u^* : 摩擦速度

流出部 速度変化 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$



ケース 1
自由すべり

ケース 2
固着条件1

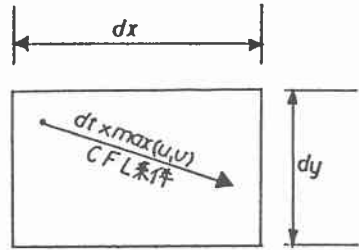


図-3 セル寸法 dx , dy

本研究では自由すべり及び固着条件について計算をおこなっている、ただし、ケース1, 2については

$d_{0,j} = (0 - u_{1,j})/dx + (v_{0,j+1} - v_{0,j})/dy = 0$ をみたす条件がある。その条件確認のため、計算をおこなっ

て結果を確認した。また、マーカー粒子の存在するセルを水領域と判断するセルと存在しないセルの境界で

自由表面が決定され2辺が空セルに接する表面セルでは連続式 $d = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ をみたすように、 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 、

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ が成立するように決定される。

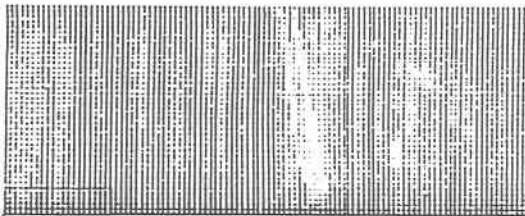


図-4 格子形状

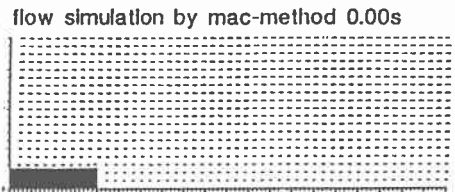
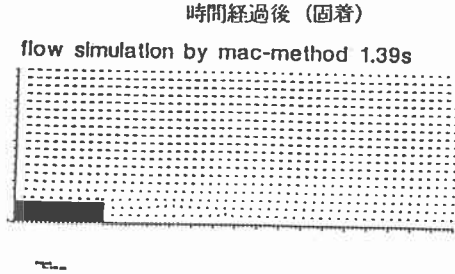
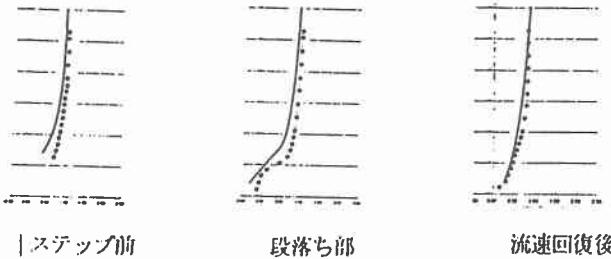


図-5 初期状態

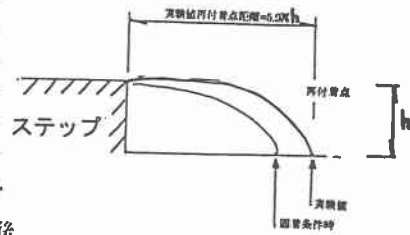
4、結果と考察



図一六 縦断速度ベクトル (固着条件)



図一七 平均流速Uの計算値と実験値の比較



図一八 再付着点位置の付着点位置
(実験値再付着点距離=5.9)

数値シュミレーションした結果を図一六に示した。図一七よりケース2の固着条件の場合では、実験値より全体的に遅い速度分布となっている。結果より全体的に流速分布が早いようである。図一七より固着条件の場合、逆に実験値より全体的に遅い流速分布となっている。再付着点位置については、再付着点距離が短くなるのが、図一八で示されている。祢津らによると段落ち流れに形成される組織渦としては強いせん断力層によるヘルムホルツの不安定性によって、形成される段落ち頂部から発生する剥離渦と土砂の巻き上げを引き起こす再付着点から浮上するコルク・ポイル渦の2種類が考えられるものとしている。縦断速度ベクトル図(図一六)をみると段落ち部に縦渦が発生するのがわかる。また、平均流速はステップ直上では対数則分布を示し、ステップ直後では、対数則分布から次第にずれて混合層型に移行し再付着点から内部境界層が発達するため再び対数則へと回復する様子を再現できていると思われる。今回のこの計算では比較的、基礎的な計算方法ではあるもののMAC法は3次元まで拡張する計算をすることが可能な方法なので、自由表面及び、今後3次元的な計算へ取り組みたい。

参考文献

- 1) 八田夏夫著 流れの計算 森北出版 1994年
- 2) 乱流における組織構造の役割 祢津 家久 水理講演会論文集 1987年2月
- 3) 開水路河床波上の乱流構造と組織渦に関する研究
中川 博次 水理講演会論文集 1989年2月
- 4) 椿 東一郎 水理学I 森北出版 1973年