

II-45

セイシュ現象を伴う流れの数値計算

北海道大学 学生員 赤堀良介
北海道大学 正員 清水康行

1 はじめに

北海道東部に位置する網走湖は、オホーツク海に向かって北上する網走川の河口付近にあるが、河口との水位差が小さいために満潮時には網走川を通して海水が逆流し湖へと流入する。そのために湖は上層が淡水、下層が塩水の二成層状態を成し、下層の塩水層では酸素の供給が非常に少ないためほぼ無酸素状態にあり、同時に近年の降雨量の減少によって上流からの洪水流入量も減少し塩淡水境界面も上昇しつつある。網走湖では一方向に風が吹きつづけた場合、下層の無酸素状態にある塩水層が上昇し、魚介類に死滅被害を及ぼす青潮が発生しているが、塩淡水境界面の上昇によって問題は深刻化している。また網走川流域は畑作、牧畜等の農業地帯であり、これらの地域からの流入による湖の水質の悪化と、それによる夏期における高温時のアオコの発生も問題となっている。青潮やアオコといったこれらの問題は付近の漁業や観光に影響を与えて社会問題化している。このような湖の現象に関して、将来の対策や、被害の影響等を予測する為の水理モデルの構築が必要とされるが本研究では特に強風時に発生する青潮の現象に注目した。一方向に風が吹きつづけることによって湖の風下側の水位が上昇し、そのために風下の塩淡水境界面が押し下げられ、逆に風上側では押し上げられることによって青潮が発生するが、その収束に際して湖がセイシュ振動を起こしていることが過去の観測によって確認されている[1]。さらに、このセイシュ振動は水面のセイシュの他に湖の塩淡水境界の振動も確認されているため、複雑な現象となっている。本論文では、実際の湖の断面形状でのモデル化を行う為の予備段階として、矩形断面での流れを、密度の変化を考慮する場合としない場合について計算を行った。モデル化にあたっては、流れを湖の鉛直方向及び水平方向の二次元の運動方程式、連続式、密度の拡散の式を用いることとした。

2 基礎式

はじめに、流体の密度が一定である場合について考える。基礎方程式としては、二次元非圧縮流体に対する以下の連続の式(1)、運動方程式(2)、(3)を利用する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \quad (3)$$

ここで (x, y) は直行する座標軸、 $P = p/\rho$ (p, ρ はそれぞれ圧力、密度)、 g_x, g_y は、 x 方向および y 方向の重力加速度、 u, v は x および y 方向流速、 t は時間、 ν は粘性係数である。本論文では、水面形が時間的に変化する現象を扱うため、(1)、(2)、(3) 式を解くにあたり、湖底と水面を境界とする境界適合座標 (ξ, η) を用いることとし以下の座標変換を行った[2]。ただし ξ および η は、それぞれ鉛直方向と、湖底及び水面にそう方向にとるものとし、 $x = x(\xi, \eta, \tau), y = y(\xi, \eta, \tau), t = \tau$ とする。

(x, y) 座標と (ξ, η) 座標は以下のように関係付けられる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\eta \\ x_\eta & y_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで (5) を逆変換して (6) を求め, (4), (6) の比較により (8) が得られる. ただし J は Jacobian とする.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (7)$$

$$\xi_x = y_\eta/J, \quad \eta_x = -y_\xi/J, \quad \xi_y = -x_\eta/J, \quad \eta_y = x_\xi/J \quad (8)$$

以上より (4) を用いて基礎式 (1), (2), (3) を (ξ, η) 座標での微分に書き換え, さらに (8) の関係を用いると以下の連続の式 (9), 運動方程式 (10), (11) が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(JU) + \frac{\partial}{\partial \eta}(JV) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (U + \xi_t) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (V + \eta_t) \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \left(\xi_x \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \nu \Delta u + g_x \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + (U + \xi_t) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (V + \eta_t) \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \left(\xi_y \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \nu \Delta v + g_y \quad (11)$$

ただし

$$\Delta = \frac{\alpha}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2\beta}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\gamma}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial}{\partial \xi} + E \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (12)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad D = \xi_{xx} + \xi_{yy}, \quad E = \eta_{xx} + \eta_{yy} \quad (13)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (14)$$

また (10), (11) の対流項中の ξ_t, η_t は ξ および η 一定の座標線が時間的に移動することによる見かけの速度である.

このように座標変換された式 (9), (10), (11) を湖の自由表面を持つ流れに適用させることを考える. この場合の表面形状を容器底面より下に設定したある基準面からの高さ $H(x, t)$ で表すこととし, 同一の基準面から容器底面までの高さを $z(x)$, 水深 h を $h = H - z$ とする. このとき高さ方向座標 y を h で規格化した座標 η を用いて液表面位置を $\eta = 1$ に固定する. すなわち以下の座標変換を行う.

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = (y - z)/h \quad (15)$$

(15) を (7), (13), (14) に代入すると

$$J = h, \quad \xi_x = 1, \quad \eta_x = -\Omega/h, \quad \left(\Omega = \eta \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \right), \quad \xi_y = 0, \quad \eta_y = 1/h$$

$$\alpha = h^2, \quad \beta = h\Omega, \quad \gamma = 1 + \Omega^2, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{h} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} \Omega \right) \quad (16)$$

$$U = u, \quad V = \frac{1}{h} (v - u\Omega), \quad \xi_t = 0, \quad \eta_t = -\frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

以上を (9), (10), (11) に代入し, $(\partial h / \partial \xi)^2 \ll 1$ と近似すると最終的に次の連続の式 (17), 運動方程式 (18), (19) を得る.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (hu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v_1) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\Omega}{h} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \nu \Delta u + g_x \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \frac{1}{h} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \nu \Delta v + g_y \quad (19)$$

ただし

$$v_1 = v - u\Omega, \quad v_2 = v_1 - \eta \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (20)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\Omega}{h} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{h} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (21)$$

また液面位置の時間変化に関して, $y = H$ において $v = \partial h / \partial t + u(\partial H / \partial x)$ と考えられることから, $\eta = 1$ において (22) が得られる.

$$v_1 = \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad (22)$$

(22) 式を用いて液面高さ H の時間変化を求める.

3 境界条件

まず自由表面についての境界条件であるが, 液面においては大気圧を 0 と考え, また今回は扱う対象の大きさを考えて表面張力は無視することとする. ただし気相と液相とのせん断力に関してはその大きさを 0 として境界条件に取り入れた. 界面での接線応力のつり合いにより (23) 式が得られ, $h_x^2 \ll 1$ として (23) 式を (ξ, η) に関する微分に書き換えると $\eta = 1$ において (24) 式を得る.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2H_x}{1 - H_x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{\partial v}{\partial \xi} + H_\xi \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) : (\eta = 1) \quad (24)$$

また底面および側面における境界条件は以下のように設定した.

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = hg_y : (\eta = 0) \quad (25)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 : (\eta = 0)$$

以上の式と境界条件によって計算を行っていくのだが, 実際の計算にあつたつての手順に付いて簡単に説明する. まず (18) 式, (19) 式を差分化することにより得られた式 (26), (27) によって新しい時刻における流速 u^{n+1}, v^{n+1} を陽的に求めることができる.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta \tau A_u^n \quad (26)$$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta \tau A_v^n \quad (27)$$

ここで肩文字 n は時刻ステップを表し A_u^n, A_v^n は (18), (19) 式の左辺の第一項以外の項を表す。また対流項に関しては一次精度の風上差分を用いた。ところで圧力場 P^n は、この新しい速度と連続の式 (17) によって定まるが、連続の式と運動方程式をともに満足させる方法を用いることとした。実際にはまず静水圧 P^* のみを考慮して (26), (27) 式より次の時刻の仮の速度 u^*, v^* を求め、その u^*, v^* に、ポアソン方程式を解くことによって求められる速度補正のポテンシャル ψ から得た補正值 \hat{u}, \hat{v} を加えたものを、新たな u^*, v^* として、この反復誤差が一定の値になるまで計算を繰り返し、その時の値を次の時刻の速度 u^{n+1}, v^{n+1} とした。

4 密度の変化を考慮する場合について

次に、流体内の密度の拡散を考慮する場合の基礎式等について述べる。これまでの式において一定であると仮定していた ρ について、以下の基礎式を与える。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (28)$$

ここで D_x は x 軸方向の拡散係数、 D_y は y 軸方向の拡散係数とする。この基礎式について (9), (10), (11) 式と同様な座標変換を行うと、(29) 式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (U + \xi t) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (V + \eta t) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = D_x \left(\frac{y_\eta^2}{J} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - 2 \frac{y_\xi y_\eta}{J^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y_\xi^2}{J} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \right) + D_y \left(\frac{x_\eta^2}{J} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - 2 \frac{x_\xi x_\eta}{J^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{x_\xi^2}{J} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \right) \quad (29)$$

さらにこの式を (17), (18), (19) 式と同様に容器内の自由表面を持つ流れに適用させると、(30) 式が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + v_2 \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = D_x \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - 2\Omega \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} \right) + D_y \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} \quad (30)$$

この (30) 式を用いて密度 ρ を陽的に求めることとする。また境界条件については、液面、固体壁において密度の変化がないとした。

5 計算結果

これまで述べてきた方法を用いて簡単な断面において実際の計算を行うこととする。まず密度の変化を考慮しない場合についての計算を行う。

水深 0.5(m)、幅 1.0(m) の矩形断面に、水面形状の初期状態として、振幅に水深の 0.1 倍を持つ \cos カーブを与えた場合についてその後の水面形状、流速を計算する。その時の一定時間ごとの水面形状の変化を示したものが図 3~6、断面の左端における水位を示したものが図 1, 2 である。ただし、計算におけるメッシュの数は縦 21、横 11 とし、また図 1, 3~6 については粘性係数を $\nu = 0.00001$ 、図 2 についてはその 1000 倍の $\nu = 0.01$ とした。この場合、図 2 において水位が急速に収束することがわかる。また、参考として節が 1 つであるときのセイシュに関する理論式 (31)、

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \quad (31)$$

からその周期を求めると 0.904(sec) となり、図 1 と比較した場合およそ 0.1(sec) の差が見られる。

次に密度の変化を考慮する場合についても計算を行う。なお、対流項に関して一次精度の風上差分を用いた場合、数値拡散が大きくなる懸念があるため、この計算においては対流項に三次精度の風上差分を用いた。この時断面の形状とメッシュの数は上と同様とする。ただし水面形状の初期状態は水深 0.5(m) で一定であるとし、密度の初期状態としては、断面の ξ 軸方向のほぼ中心に仕切り板を置き、その左側に密度 1030(kg/m³)、右側に密度 1000(kg/m³) の液体を入れて時刻 0 と同時にその板を取り外すような状態を考える。以下上と同様に、流速、密度、水面形状を計算し、密度の一定時間ごとの変化を示したものが図 7~10 である。

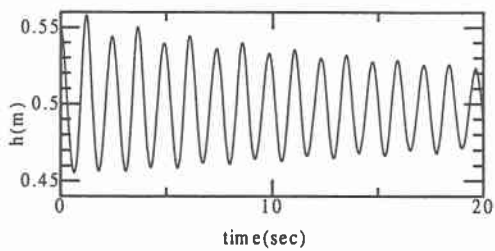


図1 水位の時間変化

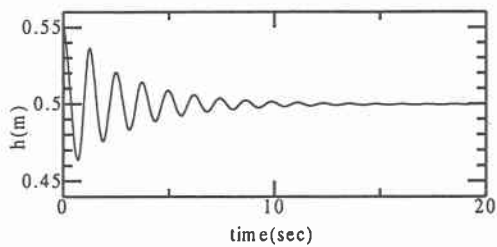


図2 水位の時間変化

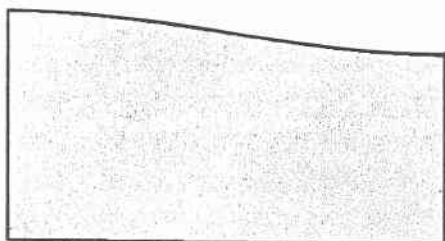


図3 t=0s

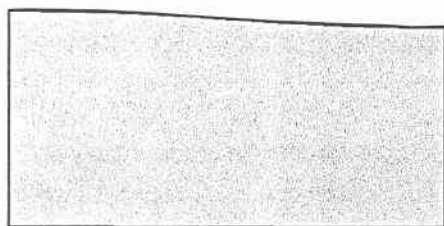


図4 t=1.0s

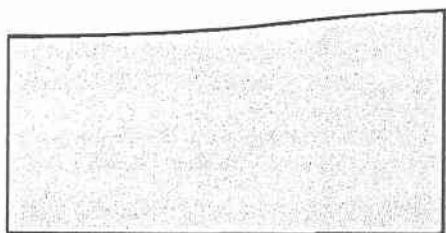


図5 t=2.0s

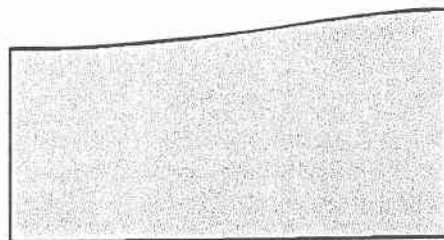


図6 t=3.0s

水面形状の時間変化

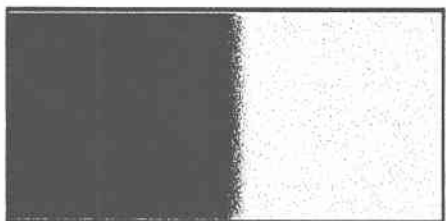


図7 t=0s

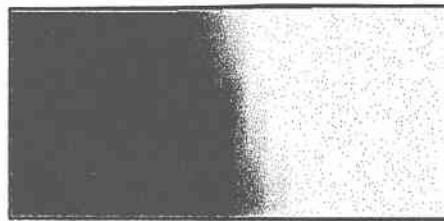


図8 t=1.0s

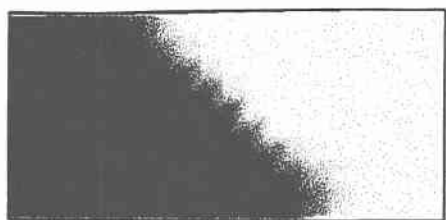


図9 t=2.0s



図10 t=3.0s

密度分布の時間変化

6 まとめ

本論文においては以上のように単純な断面上での計算を行ってきたが特に密度を考慮した場合の計算においてに水位が徐々に上昇していく傾向が見られるなど、まだまだ考えるべき点は多い。今後はそれらの問題の解決と、実際の網走湖の断面形状における適用さらに液相と気相とのせん断力を条件に取り入れ、湖面上における風の影響を考慮することを目的としく予定である。

参考文献

- 1) 池永 均, 山田 正, 内島 邦秀 他: “網走湖における吹送流の発生と成層界面の挙動に関する研究”, 水工学論文集, 第41巻, pp481-488
- 2) 川村 洋, 土方 邦夫: “熱と流れのシュミレーション”, 丸善株式会社, 1995.