

II-31

粒度組成を考慮した中規模河床形態の領域区分に関する研究

北海道大学大学院 学生員 小山 慎一郎  
 北海道大学大学院 フェロ-会員 黒木 幹男  
 北海道大学大学院 フェロ-会員 板倉 忠興

1. はじめに

中規模河床形態とは川幅規模の河床形態のことであり、横断的に存在する砂州の数により単列砂州(交互砂州)と複列砂州とに大きく区分される。

河床に砂州が形成されると流れは砂州の存在によって強く影響される。単列砂州は流れの蛇行を引き起こし、複列砂州は網状流路を形成させる。砂州の発生・非発生や単列・複列砂州の領域区分の解明は河川工学上において河床形状、流れを知る上で重要である。

中規模河床形態に関する従来の研究においては、ほとんどの場合粒径が一般的な河床材料を用いて行われてきたが、実河川ではさまざまな粒度組成の河床が存在している。本研究では、粒度組成が中規模河床形態の発生に与える影響について線形安定理論に基づき検討した。

2. 流れの方程式

剛な側壁を有する移動床広長方形水路の擬似定常流れを考える。流れは水深に比して川幅が十分大きいものとして、図のような座標系をとると、 $x, y$  方向の流れの運動方程式および、流れの連続式はそれぞれ以下のようにあらわされる。

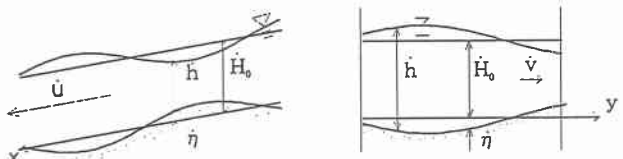


図1 座標系

$$\dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} = \dot{g} S_0 - \dot{g} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{h} + \dot{\eta}) - \frac{\dot{\tau}_x}{\rho \dot{h}} \quad (2.1)$$

$$\dot{u} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = -\dot{g} \frac{\partial}{\partial y} (\dot{h} + \dot{\eta}) - \frac{\dot{\tau}_y}{\rho \dot{h}} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\dot{u} \dot{h}) + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{v} \dot{h}) = 0 \quad (2.3)$$

ただし、 $\dot{u} \cdot \dot{v}$  は、 $x, y$  方向の平均流速、 $\dot{h}$  は局所水深、 $\dot{\eta}$  は河床の局所変位量、 $\dot{\tau}_x \cdot \dot{\tau}_y$  は  $x, y$  方向の河床せん断力、 $S_0$  は平均河床勾配、 $\dot{g}$  は重力加速度、文字上の dot は次元量を表す。次に各変量を平坦河床上の等流に対応する平均量と河床の微小な擾乱に対応する変動量に分けて式(2.4)のように表す。

$$\begin{aligned} \dot{u} &= U_0(1 + \tilde{u}) & \dot{v} &= U_0 \tilde{v} & \dot{h} &= H_0(1 + \tilde{h}) & \dot{\eta} &= H_0(1 + \tilde{\eta}) & \dot{\tau}_x &= \dot{\tau}_{b0}(1 + \tilde{\tau}_x) & \dot{\tau}_y &= \dot{\tau}_{b0} \tilde{\tau}_y \\ \dot{x} &= \dot{H}_0 x & \dot{y} &= \dot{H}_0 y & \dot{d}_m &= \dot{d}_{m0}(1 + \tilde{d}_m) & \dot{d}_l &= \dot{d}_{m0} d_l \end{aligned} \quad (2.4)$$

Regime criteria on bars considering the effect of size distribution of bed materials

By Shinichiro KOYAMA, Mikio KUROKI, Tadaoki ITAKURA

ただし、平均量には添え字0を付し、 $\bar{u} \cdot \bar{v} \cdot \bar{h} \cdot \bar{\eta} \cdot \bar{\tau}_x \cdot \bar{\tau}_y \cdot \bar{d}_m$ は無次元変動量、 $d_m$ は平均粒径。

式(4)を式(1)、(2)、(3)に代入すると、以下の無次元化された線形方程式が得られる。

$$F^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + S_0(\bar{\tau}_x - \bar{h}) + \frac{\partial(\bar{h} + \bar{\eta})}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

$$F^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + S_0 \bar{\tau}_y + \frac{\partial(\bar{h} + \bar{\eta})}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

ここで、 $F$ はフルード数。上の方程式について変数は6個含まれており、これを解くためにはあと3本方程式が必要である。 $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y$ については以下で述べ、 $\bar{\eta}$ については後章に記す。

河床せん断力について、Manning-Strickler型の抵抗則を用いて

$$\bar{\tau}_x = \frac{\dot{\rho}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}{6.9^2 \left(\frac{\bar{h}}{d_m}\right)^{1/3}} = \bar{\tau}_{b0} \left(1 + 2\bar{u} - \frac{\bar{h}}{3} + \frac{\bar{d}_m}{3}\right) \text{より、} \quad \bar{\tau}_x = 2\bar{u} - \frac{1}{3}\bar{h} + \frac{1}{3}\bar{d}_m \quad (2.8)$$

さらに黒木ら<sup>1)</sup>の用いた砂粒の斜面上の運動式から

$$\bar{\tau}_y = \bar{v} + \alpha_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{2} \frac{8(\tau_{*0} - \tau_{*cm})^{1.5}}{\mu 6.9 \left(\frac{\dot{H}_0}{d_m}\right)^{1/6} \sqrt{\tau_{*0}}} \quad (2.9)$$

ここに、 $\mu$ は動摩擦係数で、 $\mu = 0.5$ とした。 $\tau_{*0} = \bar{\tau}_{b0} / \dot{\rho} s g d_m$ は無次元掃流力。 $s$ は砂粒の水中比重、 $\tau_{*cm} = 0.05$ は無次元限界掃流力。

### 3. 流砂の連続式

粒径別の流砂量の連続式は平野より以下のように表される。 $P_i^*$ は河床が上昇するか低下するかによって異なり、また $y$ 方向に関しては粒径を考慮しなかった。

$$\Delta \frac{\partial P_i}{\partial t} + P_i^* \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\partial \dot{q}_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_{iy}}{\partial y} \right) = 0, \quad P_i^* = \begin{cases} P_i & (\partial \bar{\eta} / \partial t > 0) \\ P_{i0} & (\partial \bar{\eta} / \partial t < 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで $\Delta$ は移動層厚で、本研究では $\Delta = d_{max}$ とした、 $\lambda$ は空隙率、 $P_i, P_{i0}$ はそれぞれ粒径 $d_i$ の砂礫が流砂中、および交換層直下の元河床において占める割合。 $\dot{q}_{ix}$ は $x$ 方向の粒径 $d_i$ の流砂量、 $\dot{q}_x, \dot{q}_y$ はそれぞれ $x, y$ 方向の全流砂量。

流れの方程式と同様に、(3.1)式を線形・無次元化するために、以下の(3.2)式を代入する。

$$\dot{\Delta} = \dot{H}_0 \Delta, \quad \dot{t} = \frac{\dot{H}_0}{U_0} t, \quad \dot{q}_{xi} = \dot{q}_{bi0}(1 + \tilde{q}_{xi}), \quad \dot{q}_{yi} = \dot{q}_{bi0} \tilde{q}_{yi}, \quad P_i = P_{i0}(1 + \tilde{P}_i) \quad (3.2)$$

線形・無次元化された粒径ごとの流砂の連続式を以下の(3.3)式に示す。

$$\Delta \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + A_i \left( \frac{\partial \tilde{q}_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_{yi}}{\partial y} \right) = 0, \quad A_i = \frac{\dot{q}_{bi0}}{P_{i0}(1-\lambda)U_0\dot{H}_0} \quad (3.3)$$

この方程式を解くために、 $\tilde{P}_i, \tilde{q}_{xi}, \tilde{q}_{yi}$  の変数について以下のような微小擾乱を用いた方程式を与えることができる。

粒径ごとの流砂量 $\dot{q}_{xi}$ について Meyer-Peter-Muller の流砂量式を用る。

$$\dot{q}_{xi} = 8 P_i \sqrt{sg\dot{d}_i^3} (\tau_{*i} - \tau_{*ci})^{3/2} \quad (3.4)$$

粒径 $\dot{d}_i$ ごとの無次元掃流力 $\tau_{*i}$ は $\dot{t}_b$ を Manning-Strickler 型の抵抗則を用ることにより(3.5)式で表され、粒径ごとの無次元限界掃流力 $\tau_{*ci}$ は浅田式を用い、粒径を無次元化することにより、(3.6)式に変形される。

$$\tau_{*i} = \frac{\dot{t}_b}{\dot{\rho}sg\dot{d}_i} = \frac{\dot{\rho}U_0^2(u^2 + v^2)}{6.9^2 \dot{\rho}sg\dot{d}_i (\dot{H}_0 / \dot{d}_{m0})^{1/3}} (h / d_m)^{-1/3} = \tau_{*i0}(1 + \tilde{\tau}_x) \quad (3.5)$$

$$\tau_{*ci} = \tau_{*cm0} \left[ \frac{\log 23}{\log(2 + 21 \frac{\dot{d}_i}{\dot{d}_m})} \right]^2 = \tau_{*ci0}(1 + B_i \tilde{d}_m), \quad B_i = 2 \frac{21\dot{d}_i}{2 + 21\dot{d}_i} \frac{1}{\log(2 + 21\dot{d}_i)} \quad (3.6)$$

(3.4)式に、(3.5)、(3.6)式を代入し、微小擾乱によって線形・無次元化をすると(3.7)式が得られる。

$$\tilde{q}_{xi} = \tilde{P}_i + \frac{3}{2} \frac{\tau_{*i0} \tilde{\tau}_x - \tau_{*ci0} B_i \tilde{d}_m}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}} \quad (3.7)$$

さらに流砂量に関して、一般的に不等流の場合には流砂量はその地点における掃流力だけでなく、それより上流における水理量の影響も強く受ける。この流砂量と掃流力との遅れ距離 $\dot{\delta}$ の概念を考慮すると、 $\tilde{\tau}_x$ 、 $\tilde{d}_m$ はそれぞれ以下のようにあらわされ、

$$\tilde{\tau}_x(\dot{x} - \dot{\delta}) = \tilde{\tau}_x + (-\dot{\delta}) \frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial x}, \quad \tilde{d}_m(\dot{x} - \dot{\delta}) = \tilde{d}_m + (-\dot{\delta}) \frac{\partial \tilde{d}_m}{\partial x} \quad (3.8)$$

これを考慮すると

$$\tilde{q}_{xi} = \tilde{P}_i + D_i \left( \tilde{\tau}_x + (-\dot{\delta}) \frac{\partial \tilde{\tau}_x}{\partial x} \right) - E_i \left( \tilde{d}_m + (-\dot{\delta}) \frac{\partial \tilde{d}_m}{\partial x} \right),$$

$$D_i = \frac{3}{2} \frac{\tau_{*i0}}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}}, \quad E_i = \frac{3}{2} \frac{B_i \tau_{*ci0}}{\tau_{*i0} - \tau_{*ci0}} \quad (3.9)$$

のように書ける。遅れ距離に関して本研究では平均移動距離を用いる。平均移動距離について Einstein の半里

論式である(3.10)式を用いた。

$$\dot{\delta} = 100 \dot{d}_{m0} (1 - \exp(-0.391 / \tau_{*0}))^{-1} \quad (3.10)$$

無次元遅れ距離は  $\delta = \dot{\delta} / \dot{H}_0$  で表される。また、斜面上の砂粒運動より  $\tilde{q}_y$  は全流砂についてのみ取り扱い、以下のように表される。

$$\tilde{q}_y = \tilde{v} - \alpha_2 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*cm0}}{\tau_{*m0}} \frac{\mu}{\mu_c}} \quad (3.11)$$

平均粒径および、粒度分布に関して  $\dot{d}_m = \sum \dot{d}_i P_i$ 、 $\sum P_i = 1$  を無次元化された擾乱を用いて変形すれば  $\dot{d}_{m0} = \sum \dot{d}_i P_{i0}$  より、(3.11)、(3.12)式を得る。

$$\tilde{d}_m = \sum d_i P_{i0} \tilde{P}_i \quad (3.12)$$

$$\sum P_{i0} \tilde{P}_i = 0 \quad (3.13)$$

粒径を  $n$  分割したとすると、第3章において変数は  $\tilde{P}_i, \tilde{q}_{xi}$  がそれぞれ  $n$  個、 $\tilde{\eta}, \tilde{q}_y, \tilde{d}_m$  の合計  $2n+3$  個存在する。条件式も(3.3)、(3.9)式がそれぞれ  $n$  個、(3.11)、(3.12)、(3.13)式と合わせて計  $2n+3$  本存在するので、連立方程式は閉じている。 $\tilde{\eta}$  について解くことが出来れば、流れの方程式も解くことが出来る。

#### 4. 不安定解析

河床に次式で表されるような、微小擾乱を与える。

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} \cos(l y) \exp\{ik(x - ct)\} \quad (4.1)$$

ただし  $\hat{\eta}$  は振幅で、 $c = c_r + ic_i$  は無次元複素位相速度、 $k = \pi \dot{H}_0 / \dot{L}$ 、 $l = m \pi \dot{H}_0 / \dot{B}$  は  $x, y$  方向の波数、

$\dot{L}$  は砂州長、 $\dot{B}$  は水路幅、 $m$  は  $y$  方向の砂州の分割数。擾乱の振幅は、 $kc_i > 0$  で不安定となり、 $kc_i < 0$  で安定となる。(4.1)式で与えられる河床の擾乱により誘起される各変動量を次式のように与える。

$$(\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\tau}_x, \tilde{q}_{xi}, \tilde{d}_m, \tilde{P}_i) = (\hat{u}, \hat{h}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_{xi}, \hat{d}_m, \hat{P}_i) \cos(l y) \exp\{ik(x - ct)\}$$

$$(\tilde{v}, \tilde{\tau}_y, \tilde{q}_{yi}) = (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_{yi}) \sin(l y) \exp\{ik(x - ct)\} \quad (4.2)$$

(4.1)、(4.2)式を(2.5)、(2.6)、(2.7)、(2.8)、(2.9)、(3.3)、(3.9)、(3.11)、(3.12)、(3.13)式にそれぞれ代入して

$\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_{yi}$  を消去し、まとめると

$$\begin{pmatrix} ikF^2 + 2S_0 & 0 & ik & -4S_0/3 + ik & S_0/3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ikF^2 + S_0 & -l(1 + S_0\alpha_3) & -l & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ik & l & 0 & ik & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d_1P_{10} & d_2P_{20} & \dots & d_nP_{n0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10} & P_{20} & \dots & P_{n0} \\ G_1 & A_1l & H_1 & J_1 & K_1 & L_1 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & A_2l & H_2 & J_2 & K_2 & 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ G_n & A_nl & H_n & J_n & K_n & 0 & \dots & & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \\ \hat{h} \\ \hat{d}_m \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$G_i = 2A_iD_ik(1 - \delta ik), \quad H_i = -ikc + A_1l^2\alpha_2, \quad J_i = -\frac{1}{3}A_1ikG_i(1 - \delta ik)$$

$$K_i = -\frac{1}{3}A_1ikD_i(1 - \delta ik) - E_i(1 - \delta ik)A_1ik, \quad L_i = -ikc\Delta + A_1ik \quad (4.3)$$

のような連立方程式が得られる。6行目以降は粒径を何分割に分けるかによって式の本数が変化する。

## 5. 結果

### 5.1 領域区分

(4.3)の連立方程式の各振幅が0でない解を持つためには左辺の係数マトリックスの行列式が0でなければならない。この行列式をまとめれば、2つのパラメータ(本研究では $\tau_{*m0}, S_0$ )と $k, l, c$ および、粒度組成に関する $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, P_{10}, P_{20}, P_{30}, \dots, P_{n0}$ で表現できる。(行列式) $= f(\tau_{*m0}, S_0, k, l, c, d_1, d_2, \dots, d_n, P_{10}, P_{20}, P_{30}, \dots, P_{n0})$

(行列式) $= 0$ を解くために本研究では水理条件として $\tau_{*m0} = 0.2, S_0 = 0.01$ を与え、粒度組成に関しては、3個のケースを考えた。ケース1は粒度分布を全く考慮しない一様砂、ケース2、ケース3は下図に示す粒度組成を与えた。混合砂において、本研究では粒径を $n=3$ 分割で解析した。

(行列式) $= 0$ を $c$ について解くことにより、 $kc_i$ は $k$ と $l$ の関数で与えられる。 $kc > 0$ となる不安定領域を $k-l$ 相関面上に描くと図4のようなになる。楕円の内部の領域が $kc > 0$ となる不安定領域である。

増幅率( $kc_i$ )が極大となる $k-l$ の組み合わせが卓越すると仮定すれば、 $l$ を横軸にとり、 $kc_i$ の極大値を縦軸にとると図5の結果が得られた。

### 5.2 結果の検討

均一粒径に近い粒度組成を持つケース3の河床材料においては、粒度組成を全く考慮しなかったケース1と不安定領域、 $l$ と $kc_{max}$ の関係ともにほとんど同じ結果となった。一方、幅広い粒度分布を持つケース2においては不安定領域、砂州の発生領域が狭くなる結果を得た。ケース2とケース3は粒度組成のみが異なり、平均粒径と無次元掃流力が等し

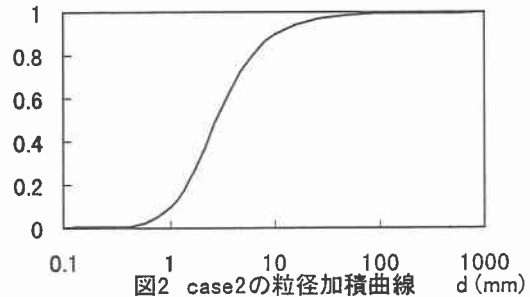


図2 case2の粒径加積曲線

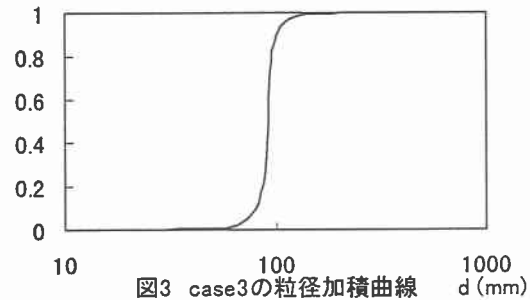


図3 case3の粒径加積曲線

均一粒径に近い粒度組成を持つケース3の河床材料においては、粒度組成を全く考慮しなかったケース1と不安定領域、 $l$ と $kc_{max}$ の関係ともにほとんど同じ結果となった。一方、幅広い粒度分布を持つケース2においては不安定領域、砂州の発生領域が狭くなる結果を得た。ケース2とケース3は粒度組成のみが異なり、平均粒径と無次元掃流力が等しくなるよう条件を与えている。したがって、砂州の発生領域に粒度組成も影響しているということが図4、図5より示された。

さらに砂州の領域区分を行うために、 $\dot{B}/\dot{H}_0$ を与えれば、波数  $l$  は、 $l = m\pi\dot{H}_0/\dot{B}$  ( $m=1,2,\dots$ ) であるので横断的な砂州の波数  $m$  ごとの離散的な値しか取れない。図5において、 $kc_{max}(l) = kc_{max}(2 \cdot l)$  となるような  $l_0$  を定義すれば、 $\pi\dot{H}_0/\dot{B} < l_0$  のとき  $m \geq 2$  なる  $m\pi\dot{H}_0/\dot{B}$  が卓越するので、複列砂州となる。逆に  $\pi\dot{H}_0/\dot{B} < l_0$  かつ  $kc_{max}(\pi\dot{H}_0/\dot{B}) > 0$  であれば、単列砂州の発生領域となる。 $kc_{max}(\pi\dot{H}_0/\dot{B}) < 0$  であれば砂州は形成されない。

## 6. まとめ

本研究では線形・無次元化された粒径ごとの流砂の連続の式を提案した。加えて、従来の線形安定理論と同様に線形・無次元化をおこなった流れの運動方程式および連続式を用いることにより、砂州の安定・不安定を論じた。

粒度組成を考慮して計算すると、広い粒度分布を持つ砂州の不安定領域の方が、より狭くなる結果となった。

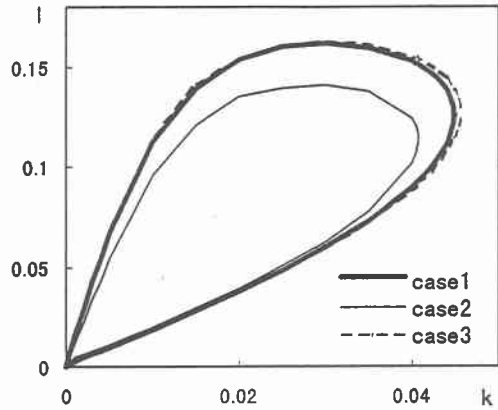


図4 不安定領域

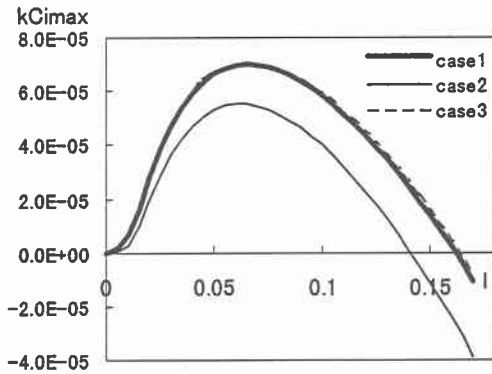


図5  $l$ と $kC_{imax}$ の関係

## 参考文献

- 1)黒木幹男・岸力:規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、土木学会論文報告集第342号 pp.87~96、1984
- 2)平野宗夫:Armorringをとまなう河床低下について、土木学会論文報告集第195号 pp.55~65、1971