

II - 9

温度成層を考慮した風の場の数値計算

北海道大学 学生員 佐藤圭洋  
 北海道大学 正員 中山恵介

1. はじめに

冷気流の張り出しによって生じる2層流の組織構造を明らかにすることは、冬期に石狩湾上で生じる実現象を解明する上で重要である。これまで冷気流模擬実験を行い、速度分布の推定や乱流熱フラックスを定義し直すことを通して、高レイノルズ数の場合と低レイノルズ数の場合について、界面抵抗係数算定式を提案してきた。そこでこの冷水密度流実験を再現するため、3次元LESモデルにより温度成層を考慮した風の場の数値計算を行った。LES(large eddy simulation)は格子平均モデルであり、空間的な平均操作により乱流運動をGS(grid scale)とSGS(sub grid scale)とに分離し、GSにおいては直接計算、SGSにおいてはモデル化を行うこととなる。ここでは、数値計算結果からその組織構造を明らかにするとともに、実験から提案された乱流熱フラックスの式及び界面抵抗係数算定式について検討する。

2. 基礎方程式

温度差による浮力を考慮すれば、Navier-Stokes 方程式は次のような形に書ける。

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + D_u \quad (1) \quad D_i = \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + D_v \quad (2) \quad R_{ij} = K_m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \quad (5)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\theta'}{\theta} + D_w \quad (3) \quad K_m = C_m l E^{1/2} \quad (6)$$

$$l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (7)$$

ここで、 $u, v, w$  は風速成分、 $\rho$  は空気密度、 $p$  は圧力、 $g$  は重力加速度、 $\theta$  は温位、 $R_{ij}$  はSGSレイノルズ応力、 $K_m$  は運動量拡散係数、 $C_m$  はモデル定数、 $l$  は混合距離、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  は  $x, y, z$  方向の格子間隔、 $E$  は乱流エネルギー、 $\bar{\quad}$  は平均量、 $\prime$  は変動量である。式(3)の右辺第2項は浮力を表す。 $D_u, D_v, D_w$  は格子平均操作の結果現れた項で、SGSでの運動の効果を表す。また、運動量拡散係数は時空間的に変動するものとして式(6)を用いる。

Klemp and Wilhelmson<sup>8)</sup>と同様にして、乱流エネルギーの収支式は式(8)のように表される。

$$\frac{DE}{Dt} = -K_h \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) - \frac{C_e}{l} E^{3/2} \quad (8) \quad K_h = \frac{K_m}{P_r} \quad (9)$$

ここで、 $K_h$  は熱拡散係数、 $P_r$  はPrandtl数、 $C_e$  はモデル定数である。 $K_h$  は速度場と温度場の相似性を考慮して式(9)を用いる。乱流エネルギー収支式において、右辺第1、2項は浮力、シアによるSGSの運動エネルギーの生成(production)項、第3項は拡散(dissipation)項、第4項は散逸(diffusion)項を表す。

温位の収支式は、勾配拡散型モデルを用いると式(10)のようになる。

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (10)$$

3. 数値計算法

図1のような staggered 格子を用いて、以下に示すようなステップで式(11)から式(21)まで計算を進めていく。式(11)のように1ステップ先の値を出しておき、式(12)、式(14)のようにその値を用いて計算するというように、 $u, v, w$  については3段階、 $p, \theta, E$  については2段階に分解して計算した。

式(1)、式(2)、式(3)と連続の方程式より、圧力に関する Poisson 方程式が得られる。数値計算上においては、分離解法を用いたため、式(12)に示されるような計算の容易な式となり、連続式を陰的に満足させ安定度を増すことができる。また、式(15)、式(17)、式(19)のような移流方程式は CIP 法を用いて計算した。

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + D_{ui}^n + \delta_{i3} g \frac{\theta^n}{\theta^n} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x_i^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p \quad (13)$$

$$\frac{\tilde{u}_i - \hat{u}_i}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \quad (14)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\tilde{\theta} - \theta^n}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_h^n \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \tilde{\theta}}{\Delta t} + u_i^{n+1} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

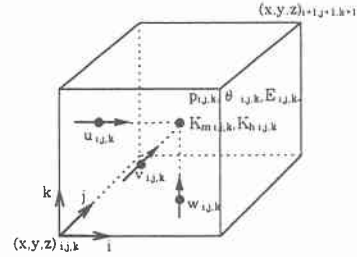


図1 計算格子

$$\frac{\tilde{E} - E^n}{\Delta t} = -K_h^n \frac{g}{\theta^{n+1}} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + R_{ij}^{n+1} \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_m^n \frac{\partial E^n}{\partial x_i} \right) - \frac{C_\epsilon}{l} E^{n\frac{3}{2}} \quad (18)$$

$$\frac{E^{n+1} - \tilde{E}}{\Delta t} + u_i^{n+1} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

$$K_m^{n+1} = C_m l E^{n+1\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$K_h^{n+1} = \frac{K_m^{n+1}}{P_r} \quad (21)$$

ここで、上付き添え字  $n$  は時間ステップ、 $\Delta t$  は計算上の時間刻み幅、上付き添え字  $n+1$  は  $n$  の  $\Delta t$  時間後である。 $n+1$  を  $n$  としてこれらの計算を繰り返し、流速  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、圧力  $p$ 、温位  $\theta$ 、エネルギー  $E$ 、運動量拡散係数  $K_m$ 、熱拡散係数  $K_h$  を求める。

#### 4. 計算概要

境界条件は、流入面においては一定の物理量を取るようにし、流出面においては開放条件、壁面においては固定壁とする。壁面境界条件においては、壁面での摩擦速度を計算上用いるため、式(22)と式(23)から摩擦速度を推定する。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{\delta} \right) + \frac{u_*}{v} \delta \quad (22) \quad R_\delta = \frac{u_* \delta}{v} = 11.6 \quad (23)$$

またモデル定数は、乱流状態で一般的によく用いられる Prandtl 数  $= 0.7$  とし、Deardorff<sup>1)</sup> に従って式(24)、式(25)、式(26)を用いて、 $C_m = 0.12$ 、 $C_\epsilon = 0.31$  とする。

$$\frac{K_h}{K_m} = 1 + 2 \frac{l}{\Delta} \quad (24) \quad C_m \approx 0.12 \quad (25) \quad C_\epsilon \approx 0.2 + 0.5 \times \frac{l}{\Delta} \quad (26)$$

提案された界面抵抗係数算定式<sup>12)</sup>を検討するため、ここでは、レイノルズ数が小さい場合(case1)と大きい場合(case2)のそれぞれについて取り上げる。

case1 のとき、計算領域は  $x$  方向 100cm、 $y$  方向 25cm、 $z$  方向 25cm、格子間隔 1cm とする。流入面から 75-85cm の位置に斜面勾配は 3:1 の斜面を設け、斜面上の温度を主流温度より  $5^\circ\text{C}$  下げる。これは、斜面上の温度を下げることによって冷気流を発生させ、密度差により主流と反対方向に冷気流が張り出すようにするためである。初期条件としては、水平面(50-75cm)上と斜面(75-85cm)上から 1cm の層の温度を主流温度より  $5^\circ\text{C}$  下げることにより、冷気流が水平面に張り出した状態にしておく。また、主流速に初期流速  $0.01(\text{m/s})$  を与え、流入速度は  $0.01(\text{m/s})$  のまま一定に保つ。計算時間刻みは  $\Delta t = 0.2(\text{s})$  とし、600(s) まで計算を行う。

同様に case2 のとき、 $x$  方向 100m、 $y$  方向 25m、 $z$  方向 25m、格子間隔 1m とし、斜面上の温度及び張り出し温度を主流温度より  $20^\circ\text{C}$  下げ、初期流速及び流入速度は  $0.1(\text{m/s})$  とする。計算時間刻みは  $\Delta t = 2.0(\text{s})$  とし、6000(s) まで計算を行う。

## 5. 計算結果及び考察

### 5.1 $Re \leq 2 \times 10^5$ のとき (case1)

図2に水路幅中央の  $x-z$  断面における流速ベクトルと主流温度より  $0.01^\circ\text{C}$  以下の等値面、図3に水路幅中央の  $x-z$  断面における渦度  $u_z-w_x$  を、図4に主流温度より  $0.01^\circ\text{C}$  低い等値面と流線、図5に渦度  $u_z-w_x$ 、図6に渦度  $u_z-w_x$ 、図7に渦度  $v_x-u_y$  を示す。5分後までは初期状態の影響で見られたが、それ以降では、冷気流はある程度形を変えながらも、主流速と斜面からの冷気供給量とのバランスによって、ある一定の位置に留り平衡状態を保つようになった。冷気流とぶつかった主流が上昇すると、それに引張られるようにして冷気も上昇し、冷気流フロントは発達する。ある程度の高さまで引き上げられた冷気は主流速方向に流されるが、冷気流フロント後方において下向きに流れを変えて、冷却斜面から供給される冷気流と合流し再度フロントに突入する。渦度  $u_z-w_x$  はとりわけ冷気流フロント付近において多く分布し、冷気流形状が変化するとともに正の値と負の値の位置や範囲を変化させていた。また図2に示すように、6分後においては冷気流先端で先走りが起こっていた。これは図3に示すように、冷気流先端近くの正の渦度  $u_z-w_x$  とそのすぐ後ろの負の渦度  $u_z-w_x$  により、その境界から冷気塊が前方下向きに押し出されることによるものではないかと思われる。このように、冷気流フロント付近での渦列はフロントが不安定な状態にあることを示している。図5では冷気流表面において渦度  $u_z-w_x$  は正の値をとり、その形状は図4の温度等値面の形状をよく表す結果となった。また図6、図7に見られるように、フロントでは壁面の影響を強く受けて3次的に大きな渦が発生しており、その影響が時間とともに主流によって後続部に伝わっていった。

図8に5分後から10分後まで時間平均した主流との温度差、図9に流速ベクトル、図10に乱流熱フラックスを示す。図8において、冷気流が主流によりフロントで大きく連行されて、温度低下範囲が上方に広がっている。また冷却斜面近くには、密度差により流れてくる冷気流によって温度差が大きな箇所がある。図9において、フロント近くで大きな渦が形成されており、この渦の中心で温度低下が生じている。後続部においては、フロントから回り込んできた流れと、斜面から冷気流フロントへ向かう流れとの間で小規模の渦が形成される。図10において、主流上昇部においては上向きの、フロント後にお

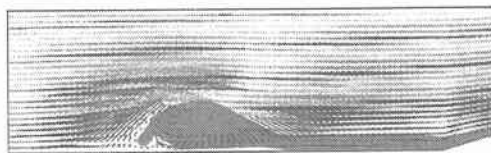


図2 水路幅中央の  $x-z$  断面における流速ベクトル、主流温度より  $0.01^\circ\text{C}$  以下の等値面(6分後)

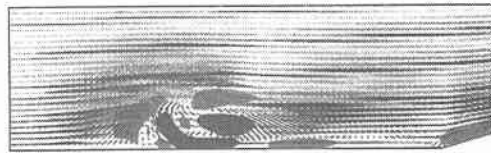


図3 水路幅中央の  $x-z$  断面における渦度  $u_z-w_x$  (濃い等値面は正、薄い等値面は負)(6分後)

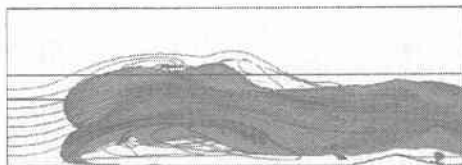


図4 冷気流の主流温度より  $0.01^\circ\text{C}$  低い等値面と流線(6分後)

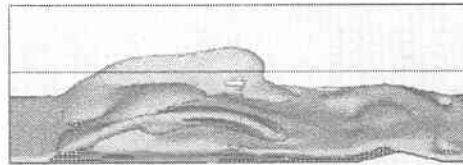


図5 渦度  $u_z-w_x$  (薄い等値面は  $0.30(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.30(1/\text{sec})$ )(6分後)

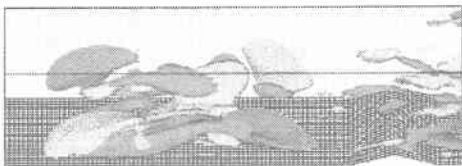


図6 渦度  $u_z-w_x$  (薄い等値面は  $0.15(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.15(1/\text{sec})$ )(6分後)

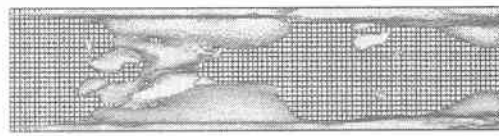


図7 渦度  $v_x-u_y$  (薄い等値面は  $0.15(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.15(1/\text{sec})$ )(6分後)

いては下向きの熱輸送が大きい。これらはフロント前縁のせん断力と渦後部のせん断力によって引き起こされており、図9に示す流速ベクトルからそのせん断層と一致していることが分かる。

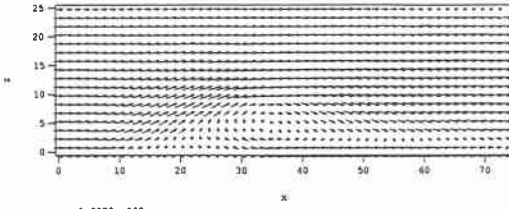


図9 5分後から10分後まで平均した流速ベクトル

図11に、 $x=50\text{cm}$ における乱流熱フラックス、 $x$ 方向流速、主流との温度差を示す。後続部45cm以降では図11とほぼ同じような分布となり、フロントから離れるにつれて底面付近での乱流熱輸送は小さくなり、冷却斜面に近づくため主流との温度差は大きくなった。冷気流先端では、主流との温度差が冷却斜面付近ほど大きくないにも関わらず、乱流熱フラックスは負の大きな値を示し、連行層では $x$ 方向流速が小さく上昇流が卓越していた。今回は比較的安定していた後続部を取り上げ、冷水密度流実験から提案された乱流熱フラックスの式、界面抵抗係数算定式について検討することとした。

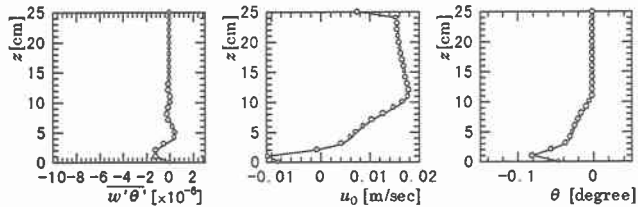


図11  $x=50\text{cm}$ における乱流熱フラックス、 $x$ 方向流速、主流との温度差

図12の上図に、縦軸に乱流熱フラックス、横軸にリチャードソン数を取り、LESによる計算、本研究の実験から提案された式、これまで用いられてきた式による結果を示す。下図では、LESによる計算結果と比較した。本研究では、低レイノルズ数においては乱流熱フラックスを式(27)のように仮定し、流速分布を式(28)として界面抵抗係数算定式が得られる。界面抵抗係数推定結果<sup>12)</sup>より式(27)での係数 $a=0.01$ 、 $b=0.5$ とした。

$$\overline{\theta' w'} = -\Delta\theta u_0 a Ri^{-b} \quad (27)$$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{z}{\delta} + \beta \frac{z - \delta}{L} \right) + \frac{u_*}{v} \delta \quad (28)$$

またこれまでの方法によれば、乱流熱フラックスが摩擦速度に比例するという条件式(29)を用いて式(28)を適応し、界面抵抗係数算定式(30)が得られる。界面抵抗係数から摩擦速度が得られ、式(29)によって乱流熱フラックスが求められる。

$$\overline{\theta' w'} = -\Delta\theta u_* \quad (29)$$

$$1 = \frac{\sqrt{f_i'}}{\kappa} \ln \frac{\beta_b f_i'^{3/2}}{\kappa R_\delta} Re Ri^{-1} + \frac{\beta}{\kappa} \beta_b \sqrt{f_i'} - \frac{\beta R_\delta}{f_i'} Re Ri^{-1} + R_\delta \sqrt{f_i'} \quad (30)$$

この2つを比べた場合、本研究により提案された式(27)を用いた場合のほうが、乱流熱フラックスはLESによる計算結果に近い値となった。したがって、乱流熱フラックス算定式に式(27)を用いることは妥当であると考えられる。ただしパラメーター $a$ の値は、LESモデル定数の見直しを含め、今後も検討が必要となる。

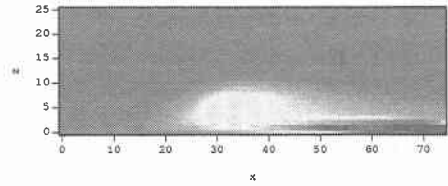


図8 5分後から10分後まで平均した主流との温度差

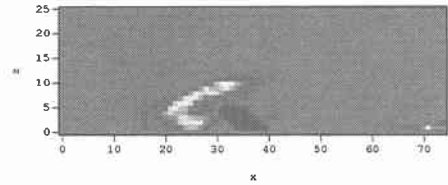


図10 5分後から10分後まで平均した乱流熱フラックス

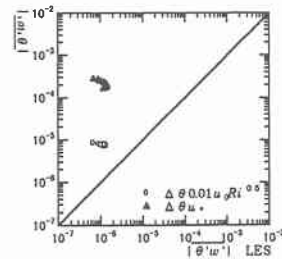
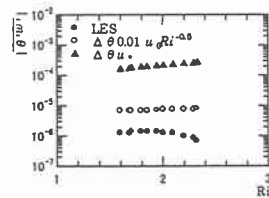


図12 乱流熱フラックスの推定結果

## 5.2 $Re > 2 \times 10^5$ のとき (case2)

図13に主流温度より  $0.1^\circ\text{C}$  低い等値面と流線、図14に渦度  $u_z - w_x$ 、図15に渦度  $w_y - v_z$ 、図16に渦度  $v_x - u_y$  を示す。50分後以降では、冷気流はある程度形を変えながらも平衡状態を保つようになった。case1と比較して、後続部にまでフロントの影響が現れている。

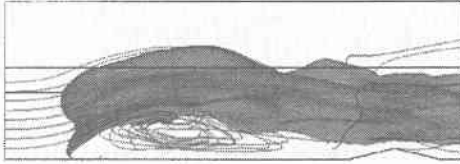


図13 冷気流の主流温度より  $0.1^\circ\text{C}$  低い等値面と流線(60分後)

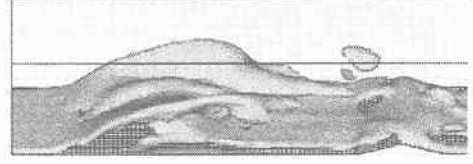


図14 渦度  $u_z - w_x$  (薄い等値面は  $6.0(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.06(1/\text{sec})$ )(60分後)

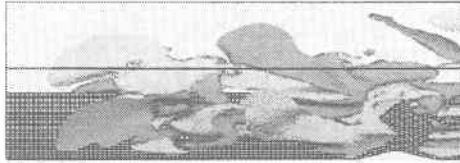


図15 渦度  $w_y - v_z$  (薄い等値面は  $2.4(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.024(1/\text{sec})$ )(60分後)



図16 渦度  $v_x - u_y$  (薄い等値面は  $2.4(1/\text{sec})$ 、濃い等値面は  $-0.024(1/\text{sec})$ )(60分後)

図17に50分後から100分後まで時間平均した主流との温度差、図18に流速ベクトル、図19に乱流熱フラックスを示す。図17において、図8と同様に冷気流が主流によりフロントで大きく連行されているが、回り込む流れが弱いので主流速により後続部に長く温度低下をもたらし、フロントとその後続部との間に明確な区別がつかない。図18において、図9と同様にフロント付近で大きな渦を形成しているが、後続部では下降流が小さい。図19において、主流上昇部においては上向きの熱輸送、後続部底面付近においては下降流による下向きの熱輸送が起こっている。case1と比較すると、フロントでの正の乱流熱フラックスは大きな値をとり、その範囲も大きい。また後続部では、上部流と冷気流との連行層のせん断力が大きいので、負の乱流熱フラックスが生じている。

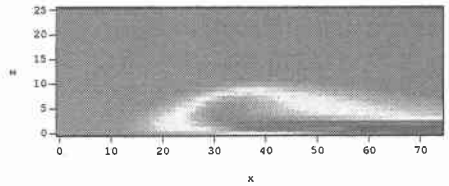


図17 50分後から100分後まで平均した主流との温度差

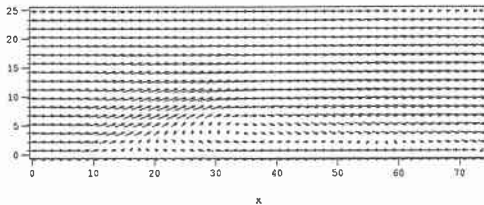


図18 50分後から100分後まで平均した流速ベクトル

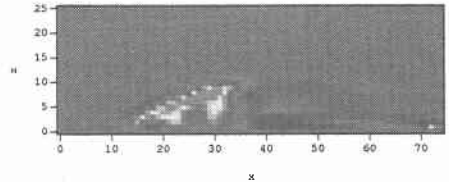


図19 50分後から100分後まで平均した乱流熱フラックス

図20に、乱流熱フラックス、 $x$ 方向流速、主流との温度差を示す。冷却斜面に近づくにつれて温度差は大きくなったが、case1に比べてフロントが後続部に与える影響が大きいので、後続部での熱フラックスは一定の分布とはならなかった。

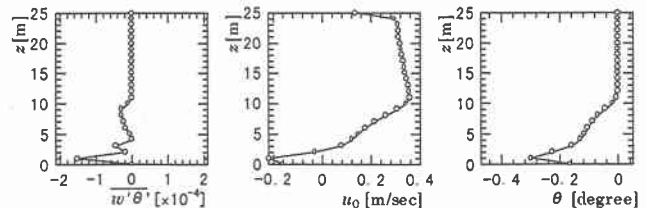


図20  $x=50\text{m}$ における乱流熱フラックス、 $x$ 方向流速、主流との温度差

case1と同様に後続部を取り上げ、冷水密度流実験から提案された乱流熱フラックスの式、界面抵抗係数算定式について検討する。図21に、LESによる計算、本研究の実験から提案された式、これまで用いられてきた式による結果を示す。本研究では、高レイノルズ数においては乱流熱フラックスを摩擦速度に比例するものとして式(31)のように仮定している。モーニン・オブコフ長さは式(32)のようになり、流速分布式を式(33)として界面抵抗係数算定式(34)を得る。

$$\overline{\theta'w'} = -\Delta\theta u. \quad (31) \quad L = \frac{u_*^3}{\kappa g \alpha \overline{\theta'w'}} = \frac{h_0 u_*^2}{\kappa u_0^2} Ri^{-1} \quad (32)$$

$$u = \frac{u_* \beta}{\kappa L} z \quad (33) \quad f_i' = \frac{\beta R_\delta}{Re Ri^{-1}} \quad (34)$$

乱流熱フラックスを計算する際、摩擦速度が必要があり、そのため式(34)から界面抵抗係数を求める。式(31)をこれまでの線形+対数分布式(28)に適応する場合と比較して、このときの乱流熱フラックスは、LESによる計算結果に近い値となった。したがって、乱流熱フラックス算定式に式(31)を用いることは妥当であると考えられる。

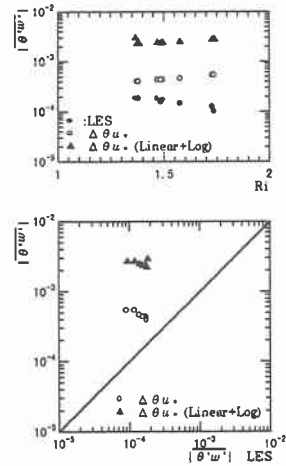


図21 乱流熱フラックスの推定結果

## 6. おわりに

本研究では、3次元LESモデルにより数値計算を行い、冷気流周辺の境界層乱流に関して言及してきた。境界層付近での組織構造を明らかにするとともに、数値計算結果と比較することにより、本研究で提案された乱流熱フラックスの式、界面抵抗係数算定式の妥当性が確かめられた。数値計算では計算メッシュを細かく取ることに限界があるため、GSとSGSとの分離スケールに注意を要する。また、モデル定数の値によってシミュレーション結果が異なるため、モデル定数の選定は今後の課題である。

## 参考文献

- 1) Deardorff, James W. : The Development of Boundary-Layer Turbulent Models for Use in Studying the Severe Storm Environment, Proc. SESAME Meeting, Boulder, NOAA-ERL, pp. 251-264, 1975
- 2) Deardorff, James W. : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, Journal of Fluid Mech. , vol.41, pp. 453-480, 1970
- 3) Kosovic, Branko: Subgrid-scale modelling for the large-eddy simulation of high-Reynolds-number boundary layers, Journal of Fluid Mech. , vol. 336, pp151-182,1997
- 4) 堀内潔: 乱流のラージ・エディ・シミュレーションについて, 天気 Vol. 38, No. 11, pp.683-697, 1991
- 5) 神田学, 稲垣聡, 日野幹雄: 植生-大気境界面における大規模渦構造と運動量交換に関するLESモデルによる検討, 土木学会論文集第22巻, pp. 39-48, 1993
- 6) 堀端康善: 積雲対流の一生のラージ・エディ・シミュレーション, ながれ8, pp253-273, 1989
- 7) 神田学, 日野幹雄: 大気-土壌系の相互作用に着目した対流性雲の発生・発達に関する3次元LESモデルによる検討, 水工学論文集第35巻, pp27-32, 1991
- 8) Klemp, Joseph B. , Robert B. Wilhelmson: The Simulation of Three-Dimensional Convective Storm Dynamics, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 35, pp1070-1096, 1977
- 9) Schem, Charles E. , Frank B. Lipps: Some Results from a Simplified Three-Dimensional Numerical Model, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, pp. 1021-1041, 1976
- 10) Mellor, George L. , Tetsuji Yamada: A Hierarchy of Turbulence Closure Models for Planetary Boundary Layers, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 31, pp. 1791-1806, 1974
- 11) 中山恵介, 長谷川和義, 藤田睦博: 札幌周辺に豪雪をもたらす冷気流発生時における風の場に関する研究, 水工学論文集第40巻, pp. 267-272, 1996
- 12) 中山恵介, 佐藤圭洋, 長谷川和義, 藤田睦博: 冷気流を模擬した冷水密度流実験, 土木学会北海道支部論文報告集, pp. 256-261,1997