

## II - 4

## 周波数応答法による降雨流出系の流域スケールの検討

北見工業大学工学部 正会員 早川 博  
 北海道大学大学院 正会員 藤田睦博  
 北見工業大学工学部 正会員 内島邦秀

## 1. はじめに

降雨流出現象は降雨を入力とし、流域で変換された流量を出力とする応答システムである。流域は降雨を流量に変換する場であるサブ流域と各サブ流域からの流量を合成・運搬する河道網から構成されている。従来、降雨流出系の応答関係はほとんどが時間領域で議論されてきたが、視点を変え、この応答関係を周波数領域で捉えることもできる。この観点の研究として、藤田ら<sup>1)</sup>、嵯峨<sup>2)</sup>らは線形応答システムに用いられる周波数応答法を降雨流出系に適用した。降雨流出系は一般に、流域における雨水の浸透、貯留機構や蒸発散等の非線形要素によって非線形システムと考えられるが、この非線形要素を考慮する<sup>3)</sup>ことによって、周波数応答法の降雨流出系へ適用が可能とされる。

近年のコンピューターの飛躍的な進歩は、流出解析においても多大な計算時間を要した分布型流出モデルを実用的なモデルにしつつある。分布型流出モデルは流域の地形構造に従って構成された流出モデルで、降雨や流域地形量などの空間的に変動する特性量を容易に取り込むことができる。流域の河道網は、地形図の縮尺によって疎らな河道網から密な河道網まで変化し、これに応じてサブ流域の大きさも変化する。つまり、分布型流出モデルにおいて、どの程度のサブ流域と河道網の組み合わせが流出応答特性にとって最良であるのが重要である。著者らはサブ流域の降雨流出モデルに星の貯留関数法<sup>4)</sup>を、河道網による流量合成に洪水波の伝搬速度を一定とする線形重ね合わせモデルを組み合わせた分布型流出モデルを用い、流域地形量が確率変動する場合の流出量の確率応答特性を理論的に導き、流出量に対する流域スケールの効果を示した<sup>5)</sup>。これは時間領域における議論であり、分布型流出モデルの最適なサブ流域の大きさを決定するための判断基準を明確にするまでには至っていない。したがって、本研究では降雨流出系を周波数領域で取り扱うことにより、分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールの判断基準を提案する。

## 2. 周波数領域における降雨流出系の応答特性

分布型流出モデルにおける降雨流出系の応答関係は図-1 に示される<sup>6)</sup>。このシステムは、不規則な周期変動をする実降雨が入力されると、観測降雨という離散化フィルター、次にサブ流域における観測降雨から流量への変換フィルターを通り、最後にサブ流域からの流量を合成・運搬する河道網のフィルターを通して流量が出力されるフィルタリングシステムである。流出解析では通常、観測降雨が与えられるので、本研究でも観測降雨を入力とした場合の流域システムの応答関係を的を絞って、議論を進める。尚、観測降雨の離散化システムについては、田中・藤田ら<sup>7)</sup>が研究を進めている。

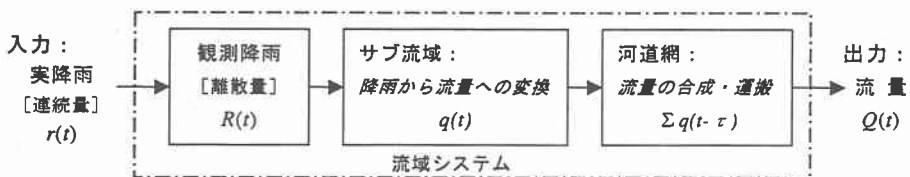


図-1 降雨流出系の応答関係

Estimation of Basin Scale for Rainfall Runoff System by using Frequency Response Method  
 by Hiroshi HAYAKAWA, Mutsuhiro FUJITA and Kunihide UCHIJIMA

## 2.1 サブ流域における降雨流出変換フィルターの周波数応答

サブ流域は降雨を流出量に変換する場である。サブ流域の降雨-流出変換モデルとして、右式に示す星の貯留関数法<sup>4)</sup>が適用された。ここで、 $S$ が貯留量(mm)、 $q$ が流出量(mm/hr)、 $r$ が観測降雨(mm/hr)である。また、 $K_1, K_2$ が貯留係数、 $P_1, P_2$ が貯留指数、 $N$ が等価粗度係数、 $s$ が斜面勾配、 $A$ が流域面積、 $\bar{r}$ が平均降雨強度である。このモデルでは、貯留係数が流域面積の関数で、サブ流域の大きさの違いによる流出への影響を考慮することができる。式(1)、(2)から、この流出モデルは式(6)の2階非線形常微分方程式で表現できるので、この式の周波数応答関係を調べることになる。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad (1)$$

$$S = K_1 q^{P_1} + K_2 \frac{dq^{P_2}}{dt} \quad (2)$$

$$K_1 = 2.823(N/\sqrt{s})^{0.6} A^{0.24} \quad (3)$$

$$K_2 = 0.2835 K_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \quad (4)$$

$$P_1 = 0.6, \quad P_2 = 0.4648 \quad (5)$$

$$K_2 \frac{d^2 q^{P_2}}{dt^2} + K_1 \frac{dq^{P_1}}{dt} + q = r \quad (6)$$

周波数応答法はシステムに正弦波入力を与え、各周波数成分毎にシステムの応答特性を調べる方法で、周波数 $\omega$ に対する入力と出力の大きさの比ゲイン $G$ と位相 $\phi$ によってその応答特性が定まる<sup>5)</sup>。式(6)は非線形形であるので、まず、線形( $P_1, P_2 = 1$ )の場合を考える。式(7)の正弦波を入力し、式(8)が出力された場合のゲインと位相は理論的に式(9)、(10)で表される。一方、非線形( $P_1, P_2 \neq 1$ )の場合は、理論解が得られないので近似解を誘導すると、式(11)、(12)となる。非線形の場合、ゲイン、位相は流域特性から定まる貯留係数だけでなく、降雨強度に依存することが分かる。図-2はこの近似式の検証結果を示している

$$r(t) = \bar{r} + B \sin(\omega t) \quad (7)$$

$$q(t) = \bar{r} + C \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

$$G = \frac{C}{B} = \frac{1}{\sqrt{(1 - K_2 \omega^2)^2 + K_1 \omega^2}} \quad (9)$$

$$\phi = -\frac{K_1 \omega}{1 - K_2 \omega^2} \quad (10)$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1 - P_2 K_2 \bar{r}^{P_2-1} \omega^2)^2 + (P_1 K_1 \bar{r}^{P_1-1} \omega)^2}} \quad (11)$$

$$\phi = -\frac{P_1 K_1 \bar{r}^{P_1-1} \omega}{1 - P_2 K_2 \bar{r}^{P_2-1} \omega^2} \quad (12)$$

$$\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (13)$$

図-2はこの近似式の検証結果を示しているが、降雨強度が大きいほど高周波数成分までゲインの低下が少ない。また、図-3はゲイン特性に及ぼす流域面積の影響を示しているが、流域面積が大きくなるにつれてゲインの損失が大きい。観測降雨の観測時間間隔 $\Delta t$ と周波数 $\omega$ との関係は式(13)で表される<sup>7)</sup>ので、 $\Delta t = 1(\text{hr})$ のとき $\omega = \pi$ となる。つまり、与えられた観測降雨に対して、分布型流出モデルを適当な大きさのサブ流域を選択しなければ、この段階で既に入力である降雨情報の大部分を損失してしまうことになる。

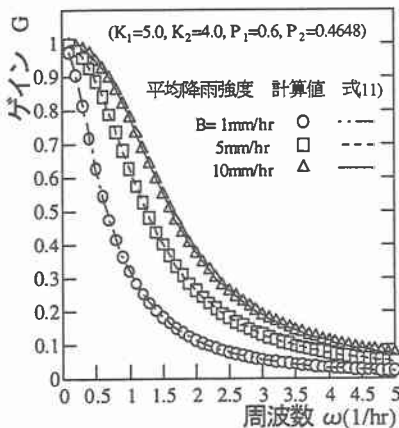


図-2 非線形システムのゲインと周波数の関係

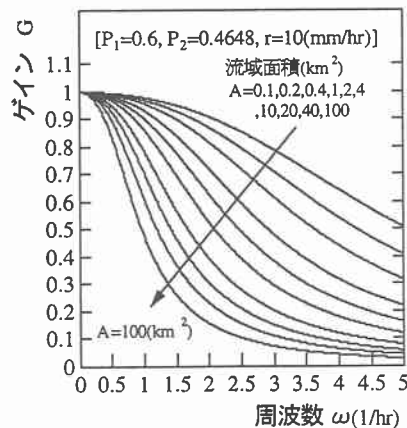


図-3 ゲイン特性に及ぼす流域面積の影響

## 2.2 河道網におけるフィルターシステムの周波数応答

サブ流域の流出量は河道を流下する時間の遅れをもって流域の出口に至る。流出の遅れには、降雨流出変換時の遅れとこの河道での流下による遅れがあり、嗟哉が流出解析に取り入れたむだ時間<sup>2)</sup>は主として河道による遅れに相当すると考えられる。各サブ流域の流出波形は、このように河道網システムを通過することによって流出の遅れや流出波形の変形が生じ、河道網システムがいわゆる低域フィルター<sup>3)</sup>の働きをしている。

河道網のフィルター特性を明らかにするために、最初にサブ流域から等しい定常状態の流出(式(14))がある場合を考える。流量の伝播速度 $v$ を一定と仮定し河道での流出の遅れ $\tau$ を考慮すると、流域の出口での流出量 $q_{ei}(t)$ は

$$q_i(t) = \sin(\omega t) \quad (14)$$

$$q_{ei}(t) = \sin\left\{\omega\left(t - \tau\right)\right\} = \sin\left\{\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right)\right\} \quad (15)$$

$$Q_i(t) = \sum_{i=1}^n A_i q_{ei}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin\left(\omega t - \frac{R_i}{v}\right) \quad (16)$$

$$G_L = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_T} \sin\left(\omega t - \frac{R_i}{v}\right) \quad (17)$$

$$q_{ei}(t) = \bar{r} + C_i \sin\left(\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right) + \phi_i\right) \quad (18)$$

$$Q_i(t) = \sum_{i=1}^n A_i q_{ei}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \left( \bar{r} + C_i \sin\left(\omega\left(t - \frac{R_i}{v}\right) + \phi_i\right) \right) \quad (19)$$

$$G_T = \frac{C}{B} = \frac{1}{B} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_T} C_i \cos\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right) \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_T} C_i \sin\left(\phi_i - \omega \frac{R_i}{v}\right) \right)^2} \quad (20)$$

$$G_S = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_T} G_i \cos \phi_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_T} G_i \sin \phi_i \right)^2} \quad (21)$$

式(15)となり、流域末端流量 $Q_i(t)$ は各サブ流域の流量を合成した式(16)となる。したがって、この場合の河道網フィルターのゲイン $G_L$ は式(17)で表される。

次に、降雨がサブ流域と河道網の両者を通過した流域全体のフィルター特性を考える。各サブ流域で変換された流出量が流域末端に達した場合、流出量は遅れ時間と位相を考慮した式(18)となり、流域末端流量 $Q_i(t)$ は式(19)で表される。式(7)の入力した降雨波形と比較することにより、サブ流域と河道網を通過した流域全体のゲイン $G_T$ は式(20)となる。これは流域全体のゲイン $G_T$ が各サブ流域のゲイン $G_i$ と位相 $\phi_i$ 、流出の遅れ $\tau_i$ から成っていることを示している。また、河道網による流出の遅れを無視( $\tau_i = 0$ )すると、河道網の流量合成機能だけによるゲイン $G_S$ が式(21)から得られる。

では、以上の提案式の検証のため、ここでは式(6)に式(7)の降雨を代入して求めた流出量から得られたゲイン(数値解)との比較を行う。なお、検証に用いた流域は、これまでの地形量解析結果<sup>9)</sup>を参考に、流域面積が $200(\text{km}^2)$ で河道網構造として平均的な河道網パターン $C(m,j)$ <sup>9)</sup>を持つ仮想的な流域である。ここで、マグニチュード $m$ は河道網の水源数に等しく、流域分割の度合いを表している。サブ流域面積等の地形量はマグニチュードに応じて平均的な地形特性量を与えている。図-4は流域全体のゲイン $G_T$ について検証した結果である。提案式(20)は数値解にほぼ一致していることが分かる。次に、図-5は河道網による流出の遅れを無視してサブ流域の流出量を

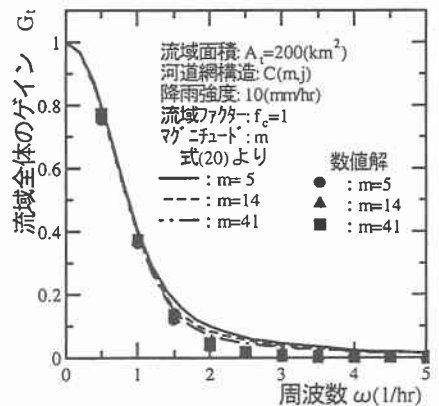


図-4 流域全体のゲイン $G_T$

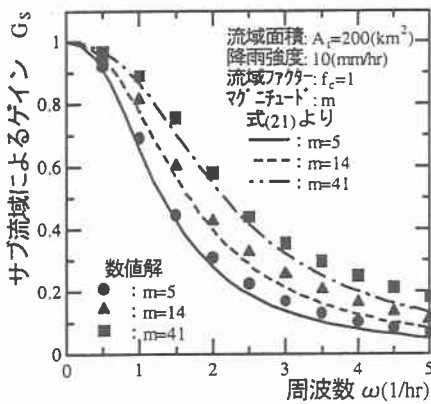


図-5 サブ流域の合成によるゲイン  $G_s$

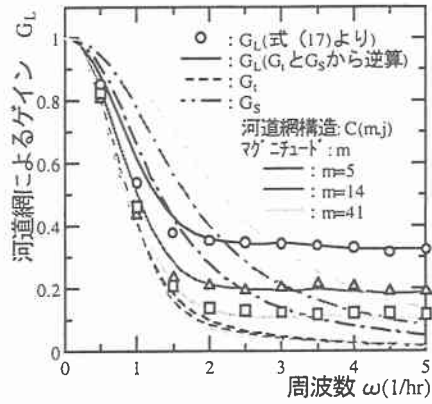


図-6 河道網によるゲイン  $G_L$

合成したゲイン  $G_s$  の比較である。これも提案式(21)は数値解に良く一致している。流出の遅れを無視した場合、マグニチュードを大きくして流域を細分化し、サブ流域のサイズを小さくした方が、ゲインの損失は少ないことが分かる。また、河道網によるゲインの提案式(17)も、数値解と良く一致することを確認している。

ここで、流域システムが図-1 のようにカスケード結合している場合、線形システムでは全体のゲインは個々のシステムのゲインの積で表される<sup>9)</sup>。先に求めた流域全体の  $G_t$  とサブ流域の  $G_s$  から、河道網だけのフィルターを通過した場合のゲイン  $G_L$  を逆算した結果が図-6 である。これと  $G_L$  の提案式(17)を比較すると良く一致しており、非線形システムである降雨流出系も図-1 のように各システムのカスケード結合とした場合、線形システムと同様に各システムのゲインの積で表されることを示している。

### 3. 分布型流出モデルの最適なサブ流域サイズ

前章で流域全体のゲイン  $G_t$  がサブ流域によるゲイン  $G_s$  と河道網によるゲイン  $G_L$  の積で近似できることを示した。すなわち、流域全体のゲイン  $G_t$  は、サブ流域によるフィルター特性と河道網によるフィルター特性によって決定される。この関係をサブ流域の流域サイズと関連付けて図示したのが、図-7 の概念図である。もし、河道網による流出の遅れが無視できる場合

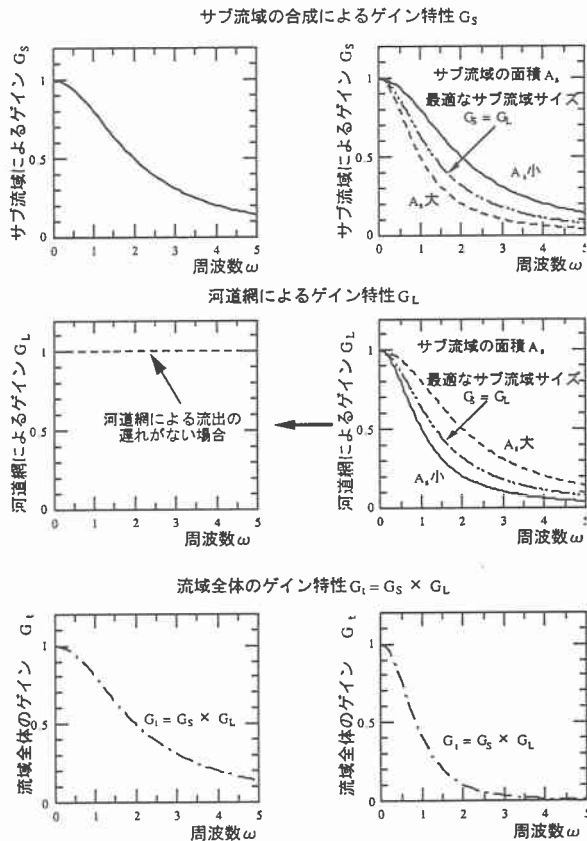


図-7 流域システムの応答関係と流域スケール概念図

は、図-7 (左) のようにサブ流域によるゲイン  $G_S$  が全体のゲイン  $G_L$  となる。これは総流域面積が小さい場合である。一方、河道網による流出の遅れが無視できない場合は、サブ流域によるゲイン  $G_S$  はサブ流域の流域サイズが小さいほど情報の損失が少なく、逆に流域サイズが大きくなるほど損失は大きい。また、河道網によるゲイン  $G_L$  は、サブ流域の流域サイズが小さいほど河道網構造が複雑になり、情報の損失が大きくなる。逆に流域サイズが大きければ損失は少なくなる。このサブ流域によるゲイン  $G_S$  と河道網によるゲイン  $G_L$  の積を考えると、図-7 (右) のように各々異なった3通りの  $G_S$  と  $G_L$  を組み合わせても、 $G_L$  は同じ値を示すことがある。しかし、 $G_S$  あるいは  $G_L$  のどちらか一方が極端に小さい場合には、その段階で入力情報の大部分を失うことになる。したがって、流域全体のゲイン特性を考えた場合、 $G_S$  と  $G_L$  が同程度の、バランスのとれた状態が最良であると考えられる。即ち、 $G_S = G_L$  の時のサブ流域スケールが、流域システムの最良の応答関係と言うことになり、この考えが分布型流出モデルの最適なサブ流域スケールの判断基準と考えられる。

次に、この判断基準の妥当性について検証する。図-8 は前章で述べたゲインの提案式を実流域（渚滑川滝上）に適用し、マグニチュード毎に求めたゲイン図で、その時のハイドログラフが図-9 である。ゲイン図を見ると、 $\omega > \pi/2$  ( $\Delta t = 2\text{hr}$ ) 以上の情報はほとんど損失していることが分かる。与えられた  $\Delta t$  は 1(hr) であるので、この場合の流出解析では、 $\Delta t$  が 2(hr) のデータでも十分であることを示唆している。では、判断基準である  $G_S = G_L$  となるマグニチュード  $m$  を図-8 から求めると、 $m=20 \sim 83$  ( $A_m = 1.46 \sim 6.07\text{km}^2$ ) となる。この結果を踏まえて図-9 を見てみると、この範囲で計算したハイドログラフは実測値に近い値を示すことが分かる。他の実流域についても  $G_S = G_L$  において求めたサブ流域サイズを流出解析に適用したところ、同様な結果を得ており、この判断基準が妥当であるものと判断できる。

では、一般的に分布型流出モデルではどの位の大きさに流域を分割すればよいのであろうか。流域の河道網構造は、流域毎に異なっているので、ここでは平均的な河道網構造  $C(m, j)$  をもつ仮想的な流域について、総流域面積とサブ流域のサイズについて考察する。図-10 は降雨強度が 5(mm/hr) の降雨について、総流域面積が 50~500(km<sup>2</sup>) の仮想的な流域を対象に求めたゲインの一部を示している。通常の流出解析では観測降雨が  $\Delta t = 1(\text{hr})$  で与えられること多いので、 $G_S = G_L$  の判断基準は、 $\omega < \pi$  の範囲がよく一致するサブ流域サイズを求めた。その結果を、総流域面積に対してプロットしたのが図-11 である。この図には、先に求めた実流域の結果も併せてプロットしてある。仮想流域の結果を見ると、最適なサブ流域サイズは降雨強度をパラメータとして、総流域面積が大きくなるに従い、サブ流域サイズが大きくなっている。また、降雨強度が大きい場合はサブ流域サイズも大きくできる

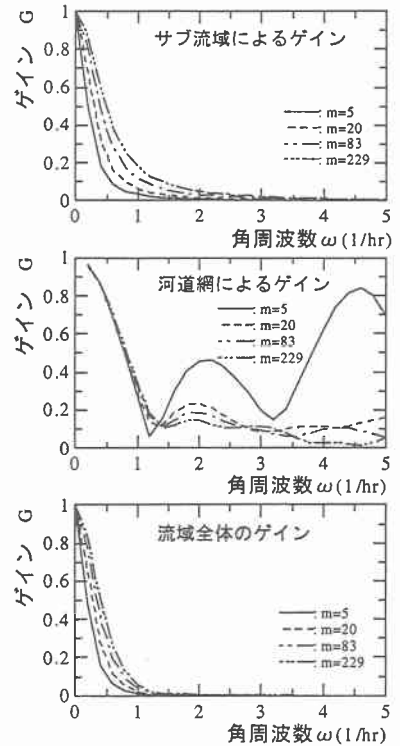


図-8 実流域におけるゲイン特性の一例 (渚滑川滝上, 1975年8月22日)

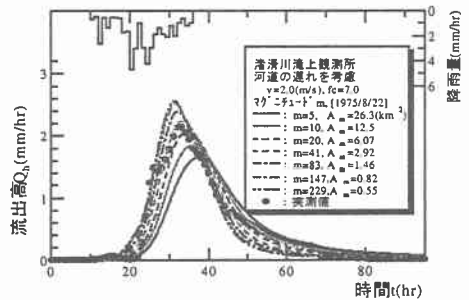


図-9 実流域のハイドログラフの一例 (渚滑川滝上, 1975年8月22日)

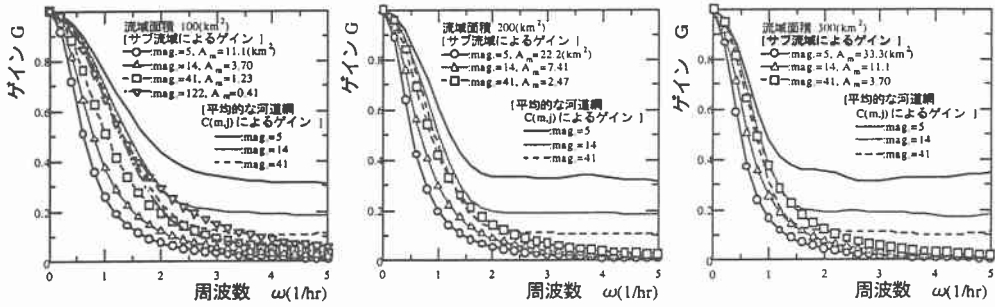


図-10 仮想流域のゲイン特性の一例

ことが分かる。これに対する実流域も、この結果を裏付けている。

#### 4. おわりに

本研究は、分布型流出モデルの最適なサブ流域サイズを決定する手法として、降雨流出系の周波数応答特性に着目した。流域システムは一種の低域フィルターと考えられるので、流域システムの応答特性に対するサブ流域によるフィルターの周波数特性と河道網によるフィルターの周波数特性の関係を明らかにした。その結果、両者のフィルター特性を等値においた場合が最適な応答関係にあることを利用し、この関係を分布型流出モデルの最適なサブ流域サイズの判断基準とする手法を提案した。仮想的な流域と実流域に本手法を適用した結果、最適な流域サイズは降雨強度に影響されるものの、降雨強度が 5(mm/hr)の場合、総流域面積が 200(km<sup>2</sup>)でサブ流域面積が 2.5(km<sup>2</sup>)程度、300(km<sup>2</sup>)で 4(km<sup>2</sup>)程度になることが示された。

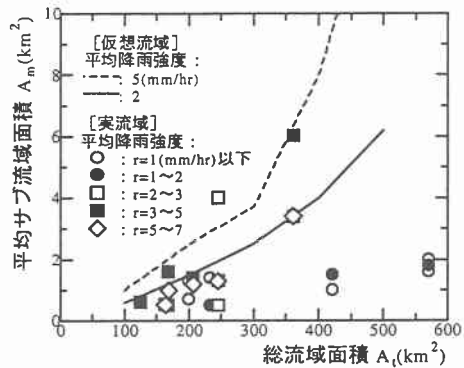


図-11 総流域面積に対する最適なサブ流域サイズ

#### 《謝 辞》

本研究の一部は文部省平成9年度科学研究費補助金・基盤研究(C)(2) (代表者：早川博)の補助と (財)北海道河川防災センターの平成9年度研究助成を受けて遂行された。記して謝意を表したい。

#### 【参考文献】

- 1)藤田陸博・山岡勲：ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判断，第13回水理講演会講演集，pp.25-30，1969。
- 2)嵯峨浩：周波数応答法による流出解析，土木学会論文集，第393号/II-9，pp.77-86，1988。
- 3)日野幹雄・長谷部正彦：流量時系列のみによる流出解析について，土木学会論文集，第300号，pp.43-56，1980。
- 4)星 清・山岡勲：雨水流法と貯留閘数法との相互関係，第26回水理講演会論文集，pp.273-278，1982。
- 5)早川博・藤田陸博・内島邦秀：流域地形特性を考慮した分布型流出モデルの確率応答に関する研究，土木学会論文集，No.545/II-36，pp.11-22，1996。
- 6)Hayakawa, H., M. Fujita and K. Uchijima : Estimation of An Appropriate Subbasin Scale for Distributed Runoff Models, Proc. of The Second Japan-South Korea Bilateral Seminar on Water Resources and Environmental Research, pp.31-36, 1997.
- 7)Tanaka, G., M. Fujita and M. Kudo : Extended Frequency Response of a Calculation Process for a Runoff System, Proc. of The Second Japan-South Korea Bilateral Seminar on Water Resources and Environmental Research, pp.31-36, 1997.
- 8)例えば，高橋利衛：自動制御の数学，オーム社，1961。
- 9)早川博：流域の地形構造を考慮した降雨流出系の確率応答と流域スケールに関する研究，北海道大学博士論文，1997。