

## I-65

ニュートンラプソン法を用いた鋼桁の  
曲げ及びねじり剛性の同定

北海道大学大学院工学研究科 正 員 平沢 秀之  
 北海道大学工学部 学生員 高橋 宏明  
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 林川 俊郎  
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 佐藤 浩一

## 1. まえがき

近年理工学系の様々な分野で逆問題の解析手法が急速に進歩し、コンピュータの計算能力の向上と相俟って、各方面における基礎研究や現実問題への適用例が増えつつある。土木の分野においては、構造物の特性値の推定や、材料に関する種々の物性値の推定等に適用される例が多く見られる。例えば斜張橋のケーブルの張力や曲げ剛性の同定<sup>1)</sup>、不完全合成桁の合成度の同定<sup>2)</sup>、杭基礎における周面摩擦力を表す非線形バネのバネ定数の同定<sup>3)</sup>等が挙げられる。一般に構造工学の領域における逆解析とは、構造物に対してある外乱が与えられ(原因)、それによる応答が得られた(結果)とすると、この結果から原因を推定する解析であると定義することができる。原因には構造物の材料特性、外力、境界条件、場の支配方程式等が含まれ、結果には通常実験や測定によって得られる数値等が含まれる。本研究では箱形断面を有する桁を対象とし、観測値から材料特性の一種である曲げ剛性やねじり剛性を同定する解析を検討したものである。逆解析の手法として代表的なものには、評価関数を設定し、これを最小化する解を探索する出力誤差法や、確率論に基づいた最小分散推定法等が存在する<sup>4)</sup>が、本研究では前者の手法を用い、解の探索には定式化の容易なニュートンラプソン法を適用した。なお観測値としては数値解析により求めた模擬観測データを用いた。

## 2. 未知変数同定のための定式化

## 2.1 骨組構造の剛性方程式

本研究では曲げとねじりを受ける骨組構造物を扱うため、要素の剛性方程式には一節点当たり、鉛直変位、たわみ角、ねじり角の3つの自由度をもつ次式の剛性マトリックスを用いる。

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ_T}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $EI$ 、 $GJ_T$ 、 $l$ はそれぞれ曲げ剛性、ねじり剛性、部材長である。一要素の剛性マトリックス $[K_e]$ の重ね合わせを行い、構造物全体の剛性方程式を得ると次式となる。

$$\{F_i\} = [K]\{u_i\} \quad (2)$$

ここで、 $\{F_i\}$ は外力ベクトルで、 $\{F_i\} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}^T$ 、 $[K]$ は構造物全体の剛性マトリックス (a行a列、aは全自由度数)、 $\{u_i\}$ は節点変位ベクトルで、 $\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ である。

Identification of flexural and torsional rigidities of steel girders by Newton-Raphson's method  
 by Hideyuki HIRASAWA, Hiroaki Takahashi, Toshiro HAYASHIKAWA and Koichi SATO

## 2.2 非線形多元連立方程式の解析

目的関数を最小化するために、同定しようとする変数についての1階微分を求めることが、逆解析を行う際にしばしば必要となる。本研究では複数の断面を有する鋼桁の複数の剛性(曲げ、ねじり)を同時に求めようとするため、この1階微分を含む非線形多元連立方程式を解かなくてはならない。ここではニュートンラプソン法<sup>5)</sup>により解くための一般式の定式化を示す。

未知変数が $x_1, x_2, \dots, x_m$ である連立方程式が次式のように表されているとする。

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

上式の真の解を $X_1, X_2, \dots, X_m$ として、その近傍 $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}$ でテイラー展開し、2階微分以上の項を省略すると式(4)のようになる。

$$\begin{cases} f_1(X_1, X_2, \dots, X_m) = f_1(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}) + \alpha_{1k} \cdot \partial f_1 / \partial x_1 + \alpha_{2k} \cdot \partial f_1 / \partial x_2 + \dots + \alpha_{mk} \cdot \partial f_1 / \partial x_m \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_m) = f_2(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}) + \alpha_{1k} \cdot \partial f_2 / \partial x_1 + \alpha_{2k} \cdot \partial f_2 / \partial x_2 + \dots + \alpha_{mk} \cdot \partial f_2 / \partial x_m \\ \vdots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_m) = f_m(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}) + \alpha_{1k} \cdot \partial f_m / \partial x_1 + \alpha_{2k} \cdot \partial f_m / \partial x_2 + \dots + \alpha_{mk} \cdot \partial f_m / \partial x_m \end{cases} \quad (4)$$

ここで、

$$\alpha_{1k} = X_1 - x_{1k}, \quad \alpha_{2k} = X_2 - x_{2k}, \dots, \quad \alpha_{mk} = X_m - x_{mk} \quad (5)$$

である。式(4)の左辺がすべて0であることを考慮して、 $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}$  について解くと次式となる。

$$\alpha_{1k} = d_{1k} / J_k, \quad \alpha_{2k} = d_{2k} / J_k, \dots, \quad \alpha_{mk} = d_{mk} / J_k \quad (6)$$

ここで、

$$J_k = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \partial f_m / \partial x_2 & \dots & \partial f_m / \partial x_m \end{vmatrix}, \quad d_{1k} = \begin{vmatrix} -f_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_m \\ -f_2 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_m & \partial f_m / \partial x_2 & \dots & \partial f_m / \partial x_m \end{vmatrix},$$

$$d_{2k} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & -f_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \partial f_2 / \partial x_1 & -f_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m / \partial x_1 & -f_m & \dots & \partial f_m / \partial x_m \end{vmatrix}, \dots, \quad d_{mk} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & -f_1 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \partial f_m / \partial x_2 & \dots & -f_m \end{vmatrix} \quad (7)$$

である。添え字 $k$ を反復回数が $k$ 回目の値であるとし、 $X_1, X_2, \dots, X_m$ をそれぞれ $x_{1k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{mk+1}$ と置き換え、式(6)を式(5)に代入して整理すると次式を得ることができる。これらの式を用いて反復計算を行い、所定の範囲内に収束したとき、連立方程式の解を求めることができる。

$$\begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} + d_{1k} / J_k \\ x_{2k+1} = x_{2k} + d_{2k} / J_k \\ \vdots \\ x_{mk+1} = x_{mk} + d_{mk} / J_k \end{cases} \quad (8)$$

## 2.3 曲げ及びねじり剛性の同定

曲げ剛性 $EI$ 及びねじり剛性 $GJ_T$ を逆解析により同定するために、次のような評価関数 $S(\{x_c\})$ を定義し、 $S(\{x_c\})$ の値を最小にするような $\{x_c\}$ を決定するという一般的な最適化法を適用する。観測点数を $n$ 、観測点 $i$ での観測変位を $\{u_i^*\}$ 、計算値を $\{u_i\}$ とし、同定しようとする未知変数を $\{x_c\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{EI_1, GJ_{T1}, EI_2, GJ_{T2}, \dots\}$ とすると $S(\{x_c\})$ は、

$$S(\{x_c\}) = \sum_{i=1}^n w_i (\{u_i^*\} - \{u_i\})^2 = \sum_{i=1}^n w_i (\{u_i^*\} - [K]^{-1} \{F_i\})^2 \quad (9)$$

となる。ここで $w_i$ は重みであり、本研究では $w_i = (1/u_i^*)^2$ とした。

式(9)を $x_\zeta$ で偏微分し、0とおくと次式となる。

$$\frac{\partial S(\{x_\zeta\})}{\partial x_\zeta} = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left( \{u_i^*\} - [K]^{-1} \{F_i\} \right) \left( - \frac{\partial [K]^{-1}}{\partial x_\zeta} \{F_i\} \right) = 0 \quad (10)$$

ここで全体剛性マトリックスの逆マトリックス $[K]^{-1}$ の偏微分については、式(11)の関係式を代入して、式(12)のようになる。

$$\frac{\partial [K]^{-1}}{\partial x_\zeta} = -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \quad (11)$$

$$\frac{\partial S(\{x_\zeta\})}{\partial x_\zeta} = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left( \{u_i^*\} - [K]^{-1} \{F_i\} \right) \left( [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \{F_i\} \right) = 0 \quad (12)$$

上式は式(3)に相当し、未知変数の総数が $m$ であるとき  $\zeta = 1, 2, \dots, m$  の  $m$ 本の連立方程式となる。式(12)をさらに未知変数で偏微分すると、式(13)が得られる。この際必要に応じて式(11)が用いられ、また $[K]$ の $EI$ または $GJ_T$ に関する2階微分がゼロになる(式(1)より明らか)ことが考慮されている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\zeta} \left( \frac{\partial S(\{x_\zeta\})}{\partial x_\zeta} \right) &= \frac{\partial^2 S}{\partial x_\zeta \partial x_\zeta} = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left( \{u_i^*\} - [K]^{-1} \{F_i\} \right) \left( -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \{F_i\} \right. \\ &\quad \left. - [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \{F_i\} \right) + w_i \left( [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \{F_i\} \right) \left( [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_\zeta} [K]^{-1} \{F_i\} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\zeta = 1, 2, \dots, m$ 、 $\xi = 1, 2, \dots, m$ である。これらの式より式(8)に相当する反復計算式を導くと、次式のようになる。

$$x_{\zeta k+1} = x_{\zeta k} + D_{\zeta k} / Y_k \quad (14)$$

ここで $Y_k, D_{\zeta k}$ は次のような式で表される。

$$Y_k = \begin{bmatrix} \partial^2 S / \partial x_1^2 & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_m \\ \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 S / \partial x_2^2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 S / \partial x_m \partial x_1 & \partial^2 S / \partial x_m \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_m^2 \end{bmatrix}, D_{\zeta k} = \begin{bmatrix} \partial^2 S / \partial x_1^2 & \dots & -\partial S / \partial x_1 & \dots & \partial^2 S / \partial x_1 \partial x_m \\ \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_1 & \dots & -\partial S / \partial x_2 & \dots & \partial^2 S / \partial x_2 \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2 S / \partial x_m \partial x_1 & \dots & -\partial S / \partial x_m & \dots & \partial^2 S / \partial x_m^2 \end{bmatrix} \quad (15, 16)$$

### 3. 数値計算例

#### 3.1 計算例1(片持ちばり)

図-1に示すような片持ちばりについて曲げ剛性 $EI$ 及びねじり剛性 $GJ_T$ を同定する。断面は①から③の3種類の変断面である。荷重は、先端部に鉛直荷重 $P=3.0\text{tf}$ 、ねじり荷重 $T=1.0\text{tfm}$ を載荷している。同定する剛性は1断面につき $EI$ と $GJ_T$ の2つであるので、全部で6個である。同定計算に関しては、始めに仮定した断面寸法から断面2次モーメント等の諸元を求め、順解析によって各節点における変位を算出し、これを模擬観測データとして用いた。同定結果を、表-1および図-2に示す。表-1は、それぞれの剛性の正解値と同定値を比較したものであり、6個の剛性が比較的良好な精度で求まっていることがわかる。図-2(a)、(b)は、 $EI$ 及び $GJ_T$ の同定値と計算回数との関係を示している。これらの図から、 $EI$ 及び $GJ_T$ はそれぞれ10数回の反復計算で収束していることが分かる。

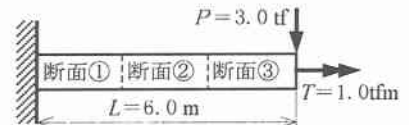


図-1 片持ちばり

表-1 計算例1の同定結果

|           | 正解値     | 同定値     | 比     |
|-----------|---------|---------|-------|
| $EI_1$    | 6177.92 | 6166.11 | 0.998 |
| $GJ_{T1}$ | 3556.24 | 3557.92 | 1.000 |
| $EI_2$    | 4874.78 | 4878.31 | 1.001 |
| $GJ_{T2}$ | 2812.62 | 2820.65 | 1.003 |
| $EI_3$    | 3418.52 | 3512.84 | 1.028 |
| $GJ_{T3}$ | 1995.71 | 1963.73 | 0.984 |

### 3.2 計算例2(曲線桁)

図-3 に示すような曲線桁について曲げ剛性  $EI$  及びねじり剛性  $GJ_T$  を同定する。断面は①から③の3種類の変断面である。荷重は、桁中央部に鉛直荷重  $P = 25.0\text{tf}$  を載荷している。同定する剛性は、計算例1の場合と同様、全部で6個である。同定計算に関しても、計算例1の場合と同様に模擬観測データを用いた。同定結果は、表-2、図-4 に示す。表-2 から  $EI$  及び  $GJ_T$  の同定値が良い精度で求まっていることが示され、図-4(a)、(b) からこれらの剛性が10数回から20回程度の反復計算で収束していることが分かる。

表-2 計算例2の同定結果

|           | 正解値     | 同定値     | 比     |
|-----------|---------|---------|-------|
| $EI_1$    | 11125.5 | 11446.9 | 1.029 |
| $GJ_{T1}$ | 9710.34 | 9673.65 | 0.996 |
| $EI_2$    | 21477.1 | 21351.4 | 0.994 |
| $GJ_{T2}$ | 16394.4 | 16497.9 | 1.006 |
| $EI_3$    | 35860.7 | 36070.0 | 1.006 |
| $GJ_{T3}$ | 23690.7 | 23528.6 | 0.993 |

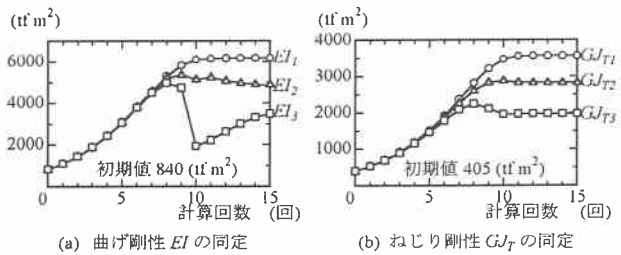


図-2 計算例1の同定値と計算回数

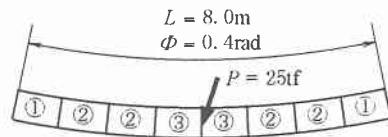


図-3 曲線桁

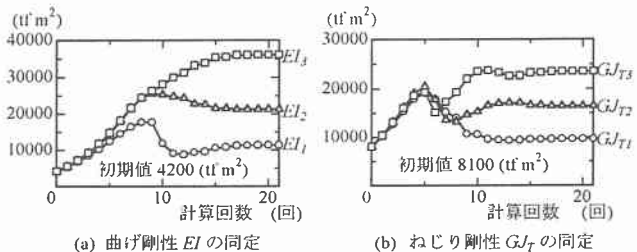


図-4 計算例2の同定値と計算回数

### 4. あとがき

ニュートンラプソン法による逆解析の定式化を行い、数値計算例として、複数の断面を有するはりについて曲げ及びねじり剛性を同定した結果を示した。計算結果はいずれもある一定の値に収束し、予想する値とほぼ一致した。本解析では、入力データとして模擬観測データ(数値計算により求めたデータ)を用いたが、実際の観測値を用いても同様の計算を行うことができる。また、観測値に道路橋示方書にあるたわみの制限値を用いれば、設計にも応用できると思われる。さらに、評価関数に応力を含む式を定義し、定式化を行えば、観測値に許容応力度を用いることで桁断面の設計にも応用できるものと考えられる。

### <参考文献>

- 1) 頭井洋, 西川徹, 濱崎義弘, 新家徹: 拡張カルマンフィルターによるケーブルの曲げ剛性と張力の同時同定に関する基礎的検討, 土木学会論文集, 第556号, pp. 189-196, 1997.
- 2) 佐藤浩一, 田川和弘, 林川俊郎, 小幡卓司, 平沢秀之: 拡張カルマンフィルタを用いた不完全合成げたの合成度の同定とその応用について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第53号(A), pp. 188-193, 1997.
- 3) 高橋秀明, 松島学: 引抜力を受ける杭の非線形せん断バネ定数の同定, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 545-552, 1997.
- 4) 村瀬治比古, 小山修平, 石田良平: 順・逆解析入門, 森北出版, 1990.
- 5) 松下祐輔, 篠崎寿夫編: 工学のための応用数値計算法入門(上), コロナ社, 1976.