

## I-51

## 収縮率の異なる完全合成多層はりの内部応力と変形について

|               |      |       |
|---------------|------|-------|
| 北海道大学大学院工学研究科 | フェロー | 佐藤 浩一 |
| 北海道大学大学院工学研究科 | 学生員  | 橘 健太郎 |
| 北海道大学大学院工学研究科 | フェロー | 林川 俊郎 |
| 北海道大学大学院工学研究科 | 正 員  | 小幡 卓司 |
| 北海道大学大学院工学研究科 | 正 員  | 平沢 秀之 |

## 1. まえがき

近年、土木や建築の分野では合成構造物が注目され、異種材料を合成し合成構造物として設計することが今後ますます重要になるものと思われる。ここで、合成構造物に用いられる構造材料は温度変化を受けると伸び縮みすることは周知の通りである。橋梁における合成構造物としては合成桁橋、あるいは合成床版などがある。これらにおいて鋼とコンクリート床版との間に温度差が生じたような場合、ひずみが生じ、内部応力が発生し、桁が変形する。また、合成多層はりのように多層になった場合にも各層の収縮率が異なると、各層に水平力と曲げモーメントが生じ、内部応力が発生し、はりは変形する。

本論文は、収縮率の異なる完全合成多層はりの内部応力と変形について、いかなる層数についても解析できる一般式を誘導することが目的である。例えば、木造の遊歩道橋などを想定した多層からなる合成構造物において、各層の収縮率が異なる場合に生ずる内部応力および変形の解析に適用できるよう検討したものである。

## 2. 解析理論

## 2.1 完全合成多層はり

本論文では図-1のような  $n$  層からなる層状の完全合成多層はりを用いる。また、本論文で用いる主な記号は次の通りである。

$A_i(\text{cm}^2)$  : 第  $i$  層の断面積、

$I_i(\text{cm}^4)$  : 第  $i$  層の断面二次モーメント、

$E_i(\text{kgf/cm}^2)$  : 第  $i$  層のヤング率、

$h_i(\text{cm})$  : 第  $i$  層の層厚、

$s_i(\text{cm})$  : 第  $n$  層の下縁から第  $i$  層の重心までの距離、

$\varepsilon_i$  : 第  $i$  層の収縮率、

$L(\text{cm})$  : スパン、

$b(\text{cm})$  : はりの幅。

ここで、 $\varepsilon_i$  が各層の収縮率であり、部材長  $1\text{cm}$  につき縮む量である。鋼桁とコンクリート床版からなる合成桁の場合は、線膨張係数  $\alpha_T = 12 \times 10^{-6}$  と温度変化  $\Delta T$  を用いた、 $\varepsilon_i = \alpha_T \cdot \Delta T$  の形で表される。本論文での収縮率は特に温度変化に限定しないものとする。

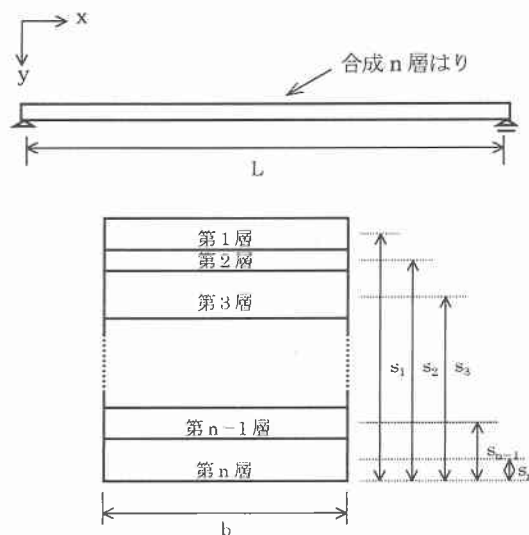


図-1 合成  $n$  層はりの合成断面

## 2.2 解析理論の誘導

図-2 のように各層に異なる収縮ひずみ  $\varepsilon_i$  が生ずる場合は、水平力と曲げモーメントが生じ、はりに変形が生ずる。変形は図において収縮前の状態の線 A-A' が収縮後に線 B-B' になるものとする。収縮後の線 B-B' を仮定すれば、水平力と曲げモーメントの方向が決まり、各層のひずみと曲率が表される。また、以降の一般式の誘導のため、水平力と曲げモーメントの方向は図-2 の通りとする。

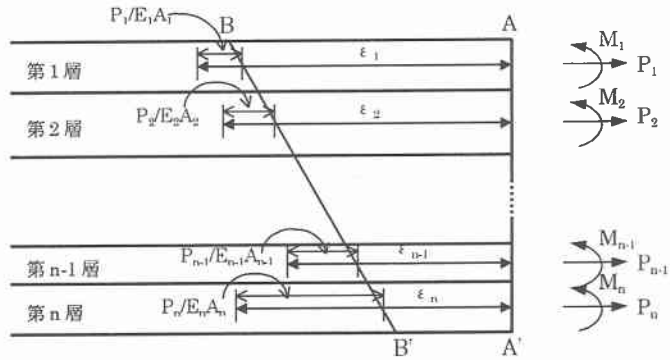


図-2 収縮ひずみの生ずる完全合成多層はり

平面保持の仮定と力のつりあいにより、次の連立式を得る。

平面保持より、次の  $(n-1)$  本の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{E_1 A_1} + \frac{M_1}{E_1 I_1} (s_1 - s_2) - \frac{P_2}{E_2 A_2} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \frac{P_2}{E_2 A_2} + \frac{M_2}{E_2 I_2} (s_2 - s_3) - \frac{P_3}{E_3 A_3} &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ \frac{P_{n-1}}{E_{n-1} A_{n-1}} + \frac{M_{n-1}}{E_{n-1} I_{n-1}} (s_{n-1} - s_n) - \frac{P_n}{E_n A_n} &= \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

各層の曲率が等しいことより、次の  $(n-1)$  本の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_1}{E_1 I_1} &= \frac{M_2}{E_2 I_2} \\ \frac{M_2}{E_2 I_2} &= \frac{M_3}{E_3 I_3} \\ &\vdots \\ \frac{M_{n-1}}{E_{n-1} I_{n-1}} &= \frac{M_n}{E_n I_n} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

水平力の総和が0より、次の1本の式が得られる。

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + P_n = 0 \quad (3)$$

曲げモーメントの総和が0より、次の1本の式が得られる。

$$(M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1} + M_n) - (s_1 P_1 + s_2 P_2 + \cdots + s_{n-1} P_{n-1} + s_n P_n) = 0 \quad (4)$$

$n$  層からなる完全合成多層はりにおいて、平面保持と曲率に関してはそれぞれ  $(n-1)$  本の式が得られ、水平力と曲げモーメントに関してはそれぞれ1本の式が得られる。従って、各層の水平力と曲げモーメントの計  $2n$  個の未知量に対して、条件式が式(1)、(2)、(3)、(4)の  $2n$  本あるので解くことができる。条件式を行列表示すると以下ようになる(式(5)~(12))。表示例として3、4、5層はりの上下非対称の場合、および上下対称の場合について示す。上下対称の場合の多層はりについては、各層に曲げモーメント  $M_i$  が生じないため、未知数は水平力  $P_i$  のみとなり、非常に簡単な式となる。

上下非対称の場合

i) n=3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} & 0 & \frac{s_1 - s_2}{E_1 I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2 A_2} & -\frac{1}{E_3 A_3} & 0 & \frac{s_2 - s_3}{E_2 I_2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_1 I_1} & -\frac{1}{E_2 I_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_2 I_2} & -\frac{1}{E_3 I_3} \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ii) n=4

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} & 0 & 0 & \frac{s_1 - s_2}{E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2 A_2} & -\frac{1}{E_3 A_3} & 0 & 0 & \frac{s_2 - s_3}{E_2 I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_3 A_3} & -\frac{1}{E_4 A_4} & 0 & 0 & \frac{s_3 - s_4}{E_3 I_3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_1 I_1} & -\frac{1}{E_2 I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_2 I_2} & -\frac{1}{E_3 I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_3 I_3} & -\frac{1}{E_4 I_4} \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

iii) n=5

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_1 - s_2}{E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2 A_2} & -\frac{1}{E_3 A_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_2 - s_3}{E_2 I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_3 A_3} & -\frac{1}{E_4 A_4} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_3 - s_4}{E_3 I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_4 A_4} & -\frac{1}{E_5 A_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{s_4 - s_5}{E_4 I_4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_1 I_1} & -\frac{1}{E_2 I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_2 I_2} & -\frac{1}{E_3 I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_3 I_3} & -\frac{1}{E_4 I_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_4 I_4} & -\frac{1}{E_5 I_5} \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & -s_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4 - \varepsilon_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

上下対称の場合

i) n=3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ii) n=4

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

iii)  $n=5$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1 A_1} & -\frac{1}{E_2 A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_2 A_2} & -\frac{1}{E_3 A_3} \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式(5)、(6)、(7)は、一例として 3、4、5 層はりの上下非対称の場合の条件式を行列表示したものである。これらの条件式より推測して、規則性があり、層数が  $n$  の場合も簡単に求められる。すなわち、 $n$  層からなる上下非対称の場合の一般式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式(11)の左辺は  $2n \times 2n$  の行列である。また、行列内の  $K_{11} \sim K_{22}$  は  $n \times n$  の行列であり、表-1 のようになる。また、右辺の列マトリックス  $\varepsilon$  の要素は次のように表される。

$$\varepsilon^j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} \quad (j = 1, n-1) \quad (12)$$

行列内の上記以外の要素は 0 である。

式(8)、(9)、(10)より、上下対称の場合の完全合成多層はりについても規則性が見られる。すなわち、層数が奇数( $n=2m-1$ )の場合は  $m \times m$  の行列となり、各要素は表-2 のようになる。残りの要素は 0 である。また、層数が偶数( $n=2m$ )の場合も  $m \times m$  の行列となり、各要素は表-2 のようになる。残りの要素は 0 である。

以上より、いかなる層数の完全合成多層はりにおいても簡単に解析できる。

### 2.3 内部応力と変形

求めた水平力  $P_i$  と曲げモーメント  $M_i$  により、各層の縁応力は次式で求まる。ただし、引張り方向を正とする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{iu} &= \frac{P_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} \frac{h_i}{2} \\ \sigma_{il} &= \frac{P_i}{A_i} + \frac{M_i}{I_i} \frac{h_i}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、各層の曲率半径  $\rho$  は一定であり、次式で求まる。

$$\rho = \frac{E_1 I_1}{M_1} = \frac{E_2 I_2}{M_2} = \dots = \frac{E_n I_n}{M_n} \quad (14)$$

曲率  $1/\rho$  ははりのたわみの二回微分で表されるので、境界条件を与えればたわみを求めることができる。

### 3. 数値計算例

数値計算例として上下非対称の三層、四層、五層の単純はりについて示す。断面諸元、および収縮率は三層はりの場合は表-3に、四層はりの場合は表-4に、五層はりの場合は表-5に示すとおりである。

表-3 三層はり

|                        | 第1層<br>(i=1)       | 第2層<br>(i=2)       | 第3層<br>(i=3)       |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $A_i(\text{cm}^2)$     | 15                 | 5                  | 10                 |
| $I_i(\text{cm}^4)$     | 11.25              | 0.417              | 3.333              |
| $E_i(\text{kgf/cm}^2)$ | $3 \times 10^6$    | $2 \times 10^6$    | $3 \times 10^6$    |
| $h_i(\text{cm})$       | 3                  | 1                  | 2                  |
| $s_i(\text{cm})$       | 5.5                | 3.5                | 2                  |
| $\varepsilon_i$        | $5 \times 10^{-6}$ | $2 \times 10^{-6}$ | $3 \times 10^{-6}$ |

L=500cm

b=5cm

表-4 四層はり

|                        | 第1層<br>(i=1)       | 第2層<br>(i=2)       | 第3層<br>(i=3)       | 第4層<br>(i=4)       |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $A_i(\text{cm}^2)$     | 15                 | 5                  | 10                 | 5                  |
| $I_i(\text{cm}^4)$     | 11.25              | 0.417              | 3.333              | 0.417              |
| $E_i(\text{kgf/cm}^2)$ | $3 \times 10^6$    | $2 \times 10^6$    | $3 \times 10^6$    | $3 \times 10^6$    |
| $h_i(\text{cm})$       | 3                  | 1                  | 2                  | 1                  |
| $s_i(\text{cm})$       | 5.5                | 3.5                | 2                  | 0.5                |
| $\varepsilon_i$        | $5 \times 10^{-6}$ | $2 \times 10^{-6}$ | $3 \times 10^{-6}$ | $4 \times 10^{-6}$ |

L=500cm

b=5cm

表-5 五層はり

|                       | 第1層<br>(i=1)       | 第2層<br>(i=2)       | 第3層<br>(i=3)       | 第4層<br>(i=4)       | 第5層<br>(i=5)       |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $A_i(\text{cm}^2)$    | 15                 | 5                  | 10                 | 5                  | 10                 |
| $I_i(\text{cm}^4)$    | 11.25              | 0.417              | 3.333              | 0.417              | 3.333              |
| $E_i(\text{kg/cm}^2)$ | $3 \times 10^6$    | $2 \times 10^6$    | $3 \times 10^6$    | $3 \times 10^6$    | $5 \times 10^6$    |
| $h_i(\text{cm})$      | 3                  | 1                  | 2                  | 1                  | 2                  |
| $s_i(\text{cm})$      | 7.5                | 5.5                | 4                  | 2.5                | 1                  |
| $\varepsilon_i$       | $5 \times 10^{-6}$ | $2 \times 10^{-6}$ | $3 \times 10^{-6}$ | $4 \times 10^{-6}$ | $1 \times 10^{-6}$ |

L=500cm

b=5cm

上記の断面諸元と収縮率を用いて、式(11)の一般式で計算を行った。

各層に働く水平力と曲げモーメントの計算結果を表-6に示す。また、各層に働く内部応力度を表-7に示す。

表-6 水平力および曲げモーメント

|                     | 三層はり<br>(n=3) | 四層はり<br>(n=4) | 五層はり<br>(n=5) |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|
| $P_1(\text{kgf})$   | 13.691        | 18.885        | 10.289        |
| $P_2(\text{kgf})$   | -16.697       | -19.501       | -17.401       |
| $P_3(\text{kgf})$   | 3.005         | -14.317       | 1.000         |
| $P_4(\text{kgf})$   | —             | 14.933        | 27.102        |
| $P_5(\text{kgf})$   | —             | —             | -20.990       |
| $M_1(\text{kgfcm})$ | 17.316        | 10.637        | 17.402        |
| $M_2(\text{kgfcm})$ | 0.428         | 0.263         | 0.430         |
| $M_3(\text{kgfcm})$ | 5.131         | 3.152         | 5.156         |
| $M_4(\text{kgfcm})$ | —             | 0.397         | 0.645         |
| $M_5(\text{kgfcm})$ | —             | —             | 8.593         |

表-7 内部応力度

|                                | 三層はり<br>(n=3) | 四層はり<br>(n=4) | 五層はり<br>(n=5) |
|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| $\sigma_{1u}(\text{kgf/cm}^2)$ | -1.396        | -0.159        | -1.634        |
| $\sigma_{1l}(\text{kgf/cm}^2)$ | 3.222         | 2.677         | 3.006         |
| $\sigma_{2u}(\text{kgf/cm}^2)$ | -3.852        | -4.215        | -3.996        |
| $\sigma_{2l}(\text{kgf/cm}^2)$ | -2.826        | -3.585        | -2.965        |
| $\sigma_{3u}(\text{kgf/cm}^2)$ | -1.239        | -2.377        | -1.447        |
| $\sigma_{3l}(\text{kgf/cm}^2)$ | 1.840         | -0.486        | 1.647         |
| $\sigma_{4u}(\text{kgf/cm}^2)$ | —             | 2.511         | 4.647         |
| $\sigma_{4l}(\text{kgf/cm}^2)$ | —             | 3.462         | 6.194         |
| $\sigma_{5u}(\text{kgf/cm}^2)$ | —             | —             | -4.677        |
| $\sigma_{5l}(\text{kgf/cm}^2)$ | —             | —             | 0.479         |

詳細の計算結果は示していないが、三層はり、四層はり、五層はり全てについて式(1)、(2)、(3)、および(4)が成り立っていることを確認してある。また、曲げモーメントが全て正であるため、はり図-2において仮定した収縮後の線 B-B'の向きに変形したことがわかる。

表-6を図示すると次のようになる。

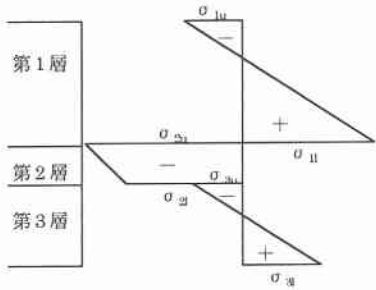


図-3 三層はりの縁応力

図-3、4、5において、応力図の正負の面積の合計が0であることが分かり、それは自己平衡状態を示している。また、曲率半径、および各点のたわみは表-8 のようになり、変形の状態が分かる。

#### 4. あとがき

- 1) 本論文は、収縮率の異なる完全合成多層はりの内部応力と変形について、いかなる層数についても解析できる一般式を誘導した。
- 2) 解析で求める未知量は水平力と曲げモーメントであるが、条件式の連立方程式を解くことにより求めることができる。

- 3) 連立方程式は行列表示することができ、層数  $n$  の増加に伴い規則的に変化することが分かる。上下対称の場合の完全合成多層はりについては、各層に曲げモーメントが生じないため、行列は簡単に表される。それらについても層数の増加に伴い規則的に変化するが、奇数層の場合と偶数層の場合とに違いがある。以上により、いかなる層数の完全合成多層はりについても、水平力と曲げモーメントが簡単に求まる。

- 4) はりに生ずる内部応力については、応力図において正負の面積の合計が0である。これは自己平衡状態であることを意味している。

- 5) はりの変形については、求められた曲げモーメントより各層の曲率が得られ、はりの曲率半径を求めることができる。また、曲率より、境界条件を与えればはりのたわみを求めることができる。

本論文ではその構造特性については触れていないが、別の機会に発表したい。また、層間にずれの生じる不完全合成多層はりについても別の機会に発表したい。

#### 【参考文献】

- 1) 渡辺 昇：橋梁工学、朝倉書店、1994.
- 2) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.1.
- 3) 細川弥重、田島二郎：合成桁の設計、オーム社、1966.

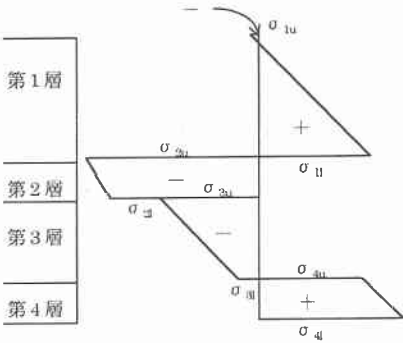


図-4 四層はりの縁応力

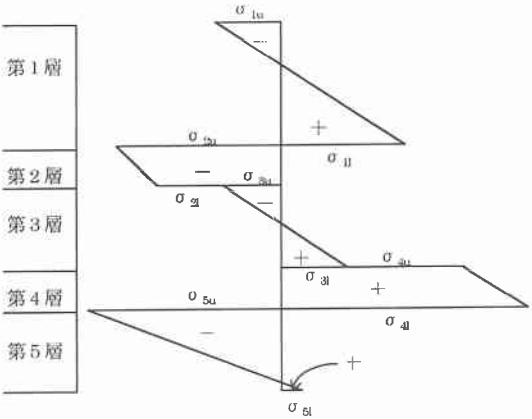


図-5 五層はりの縁応力

表-8 曲率半径およびたわみ

|               | 三層はり                   | 四層はり                   | 五層はり                   |
|---------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\rho$ (cm)   | $1.949 \times 10^6$    | $3.173 \times 10^6$    | $1.939 \times 10^6$    |
| $y(L/8)$ (cm) | $7.017 \times 10^{-3}$ | $4.309 \times 10^{-3}$ | $7.049 \times 10^{-3}$ |
| $y(L/4)$ (cm) | $1.203 \times 10^{-2}$ | $7.388 \times 10^{-3}$ | $1.208 \times 10^{-2}$ |
| $y(L/2)$ (cm) | $1.604 \times 10^{-2}$ | $9.850 \times 10^{-3}$ | $1.611 \times 10^{-2}$ |