

I - 50

不完全合成はりの曲げおよび座屈解析手法について

北海道大学大学院工学研究科	フェロー	佐藤 浩一
北海道大学大学院工学研究科	学生員	劉 澤典
北海道大学大学院工学研究科	フェロー	林川 俊郎
北海道大学大学院工学研究科	正 員	小幡 卓司
北海道大学大学院工学研究科	正 員	平沢 秀之

1. まえがき

異種材料を合成し複合構造物として使用する主な目的は、単一材料では得ることのできない望ましい力学特性を作り出すことである¹⁾。また、ガイドブック的なものとしてNCB研究会より文献²⁾が出版されており、異なった材料を用いた合成構造物として設計することが今後さらに重要になるものと思われる。合成構造物としては非合成はり、あるいは合成はりがある。非合成はりとは単に2種類の構造部材を重ねて用いたものであり、両者の間には結合がない。すなわち、合成度0%である。これに対して、完全合成はりでは2種類の構造部材をすれ止め(ジベル)で結合し、両者が一体となって働くようにしたものである。この場合には合成度を100%としている。通常は合成度100%と考えて解析しているが、すれ止め(ジベル)の剛性が小さい場合にはすれが生じ、いわゆる不完全合成はりとなる。

本論文の第一の目的は、同種材料あるいは異種材料からなる合成はりのすれを考慮した不完全合成はりの曲げ解析と座屈解析に関する常微分方程式を示すことであり、第二の目的はそれらの解析理論^{4) - 11)}を2本の常微分方程式として解く場合と1本の常微分方程式として解く場合とを理論的解析および数値解析により比較検討することであり、第三の目的は合成度を与えて断面二次モーメントの低減を考慮した不完全合成はりの座屈解析が可能な簡易微分方程式を示すことである。

2. 本論文で用いる主な記号と断面諸元

合成はりの合成断面を図-1に示す。本論文で用いる記号は次の通りである。

E_1 = 第1層材のヤング率、 E_2 = 第2層材のヤング率、 $n = E_2/E_1$ 、

$I_v = I_2 + I_1/n + A_1 S_1 S/n =$ 合成はりに関する断面二次モーメント、

I_1 = 第1層材の重心に関する断面二次モーメント、

I_2 = 第2層材の重心に関する断面二次モーメント、

A_1 = 第1層材の断面積、 A_2 = 第2層材の断面積、

$A_v = A_2 + A_1/n =$ 合成断面の断面積、

S_1 = 第1層材重心と合成断面の重心との距離、

S_2 = 第2層材重心と合成断面の重心との距離、

$S = S_1 + S_2$ = 第1層材重心と第2層材重心の距離、

p = 等分布活荷重強度、 k = バネ定数^{3), 12)}、

M_{vv} = 完全合成断面の中立軸に作用する曲げモーメント。

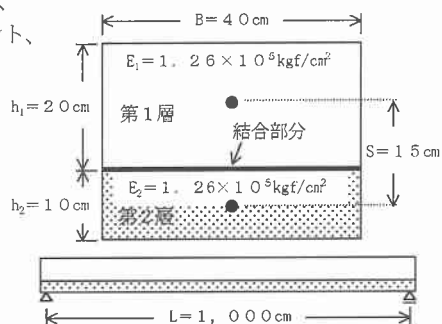


図-1 合成はり断面諸元

3. 不完全合成はりの曲げ解析

3.1 不完全合成はりのたわみに関する微分方程式

完全合成はりの曲げ解析におけるたわみ W_v に関する微分方程式は次式の通りである⁴⁾。

$$\frac{d^4 W_v}{dx^4} = \frac{p}{E_2 I_v} \quad (1)$$

Study on Structural and Buckling Analytical Procedures of Partial Composite Beams
by Koichi SATO, JeckDeng LAU, Toshiro HAYASHIKAWA, Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA

次に、不完全合成はりの曲げ解析におけるたわみ W_{ve} に関する微分方程式は次の通りである^{4) - 7)}。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_{ve}'' = -E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_v'' + \frac{n I_v}{n I_2 + I_1} \cdot p \quad (2)$$

ここで、
$$\kappa^2 = \frac{n I_v}{n I_2 + I_1} \cdot \frac{kn}{E_2 A_1} \cdot \frac{S}{S_1} \quad (3)$$

である。一方、不完全合成はりのたわみ W_{ve} と完全合成はりのたわみ W_v との差をずれによるたわみ W_e とすれば、 W_e に関しては式 (2) と式 (1) との差より⁴⁾

$$E_2 I_v \cdot W_e^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_e'' = \frac{n I_v}{n I_2 + I_1} \cdot p \quad (4)$$

となる。結局、式 (2) は次の2本の常微分方程式になる。

$$\begin{cases} W_v^{IV} = \frac{p}{E_2 I_v} & (5) \\ W_e^{IV} - \kappa^2 \cdot W_e'' = \frac{p}{E_2 I_e} & (6) \end{cases}$$

ただし、
$$I_e = I_v \cdot \frac{n I_2 + I_1}{A_1 S_1 S} \quad (7)$$

である。式 (2) は本論文で扱う曲げ解析に関する1本の常微分方程式であり、式 (5)、(6) が2本の常微分方程式である。

3. 2 二つの解析手法の比較検討

不完全合成はりに関する曲げ解析は、式 (5) と式 (6) の2本の式によって解析するのが一つ目の解析手法であり、式 (2) から直接解析するのが二つ目の解析手法とする。ここでは、二つの解析手法で得られた結果が同一であることを示す。すなわち、後述の表1である。

まず、 $M_{vv} = -E_2 I_v \cdot W_v''$ より、式 (2) を次の式 (8) のように書き換えることができる。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_{ve}'' = \kappa^2 \cdot M_{vv} + \frac{n I_v}{(n I_2 + I_1)} \cdot p \quad (8)$$

ここで、式 (8) の右辺の二項に注目し、それぞれの単位 ([LFT] 系で) を見比べてみると、

$$\kappa^2 \cdot M_{vv} \longrightarrow \frac{1}{[L^2]} \times [F] [L] = \frac{[F]}{[L]} = [FL^{-1}] \quad (9a)$$

$$\frac{n I_v}{(n I_2 + I_1)} \cdot p \longrightarrow [FL^{-1}] \quad (9b)$$

である。つまり、 M_{vv} は等分布荷重 p によって完全合成はりに生じた曲げモーメントであり、式 (9a)、(9b) とともに既知の値である。ただし、曲げモーメント M_{vv} は載荷条件と境界条件によって、その値が異なってくる¹³⁾。ここで、例として両端の境界条件が単純支持で等分布荷重 $p = 0.5 \text{ kgf/cm}$ が作用している不完全合成はりについて計算を行った。両端単純支持の場合、式 (9a) は次のようになる。

$$\kappa^2 \cdot M_{vv} = \kappa^2 \cdot \left\{ \frac{x(L-x)}{2} \cdot p \right\} \quad (10)$$

つまり、式 (10) は完全合成はりに作用する曲げモーメント M_v に式 (3) の κ^2 を乗じたものである。た

だし、 x : 載荷点位置、 L ははりの全長である。一方、式 (9b) は $\frac{nI_v}{(nI_2 + I_1)}$ 倍した等分布荷重 p である。

換言すれば、式 (2) の右辺は不完全合成はりに働く単位長さあたりの荷重であり、式 (10) と式 (9b) を足し合わせたものである。それを図示すれば、図-2 のようになる。

表-1 は、バネ定数を $k = 50\text{kgf/cm}^2$ 、 $k = 500\text{kgf/cm}^2$ 、 $k = 5,000\text{kgf/cm}^2$ と変化させながら式 (5) と式 (6) による不完全合成はりの中央点のたわみの値と、式 (8) による不完全合成はりの中央点のたわみの値とを示したものである。また、図-3 は全体のたわみを示している。不完全合成はりのたわみ角、曲げモーメントと軸力についても同様なことが言える。

表-1 不完全合成はりの中央点のたわみの比較

両端単純支持、等分布荷重の場合	$W_v + W_e$	W_{ve}
バネ定数 $k = 50\text{kgf/cm}^2$	1.362	1.362
バネ定数 $k = 500\text{kgf/cm}^2$	0.779	0.779
バネ定数 $k = 5,000\text{kgf/cm}^2$	0.598	0.598

(単位 : cm)

また、他の境界条件 (両端固定) あるいは載荷条件 (集中荷重) についても同様な結果を得ている。

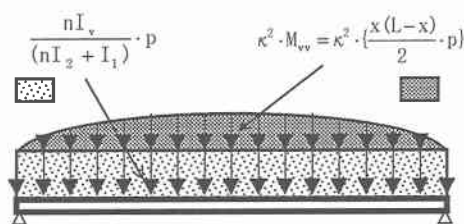


図-2 不完全合成はりにおける荷重載荷状態

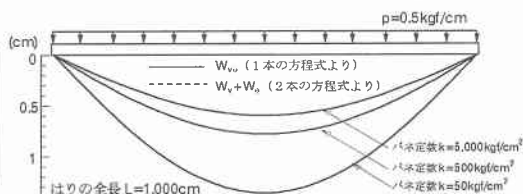


図-3 不完全合成はりのたわみの比較
(両端支持、等分布荷重の場合)

4. 不完全合成はりの座屈解析

4. 1 不完全合成はりの座屈解析に関する微分方程式

ここでは、不完全合成はりの座屈解析に関する常微分方程式を誘導する。まず、不完全合成はりの座屈荷重を N_v とし、完全合成はりの場合の文献4) の考え方を適用すれば、式 (5) と式 (6) の曲げ解析と同様に次のような微分方程式が得られるとする。つまり、完全合成はりのたわみ W_v とずれによるたわみ W_e のそれぞれの座屈荷重を N_v 、 N_e とする。

$$\begin{cases} E_2 I_v \cdot W_v^{IV} = -N_v \cdot W_v'' & \text{----- (11)} \\ E_2 I_e \cdot W_e^{IV} - E_2 I_e \kappa^2 \cdot W_e'' = -N_e \cdot W_e'' & \text{----- (12)} \end{cases}$$

式 (11)、(12) が本論文で扱う座屈解析に関する2本の常微分方程式である。

単純支持の場合、以上の式 (11) と式 (12) より $\xi_v^2 = \frac{N_v}{E_2 I_v}$ 、 $\xi_e^2 = \frac{N_e - \kappa^2 E_2 I_e}{E_2 I_e}$ とし、オイラーの理

論式より $\sin \xi L = 0$ であり、座屈荷重 N_v 、 N_e は式 (13) と式 (14) のようになる。

$$\begin{cases} N_v = E_2 I_v \cdot \frac{\pi^2}{L^2} & \text{----- (13)} \\ N_e = E_2 I_e \cdot \left(\frac{\pi^2}{L^2} + \kappa^2 \right) & \text{----- (14)} \end{cases}$$

著者らの知る限りでは、不完全合成はりの座屈解析に関する研究はほとんどされていないと思われる。不完全合成板の座屈解析理論に関しては文献10) があるが、曲げ解析の場合と同様に2本の微分方程式を用いて解析している。不完全合成はりの座屈荷重 N_{ve} は、完全合成はりと重ねはりの両極端な状態の中間を示すと考え、式 (15) のランキンの式のような形であるとする。

$$\frac{1}{N_{ve}} = \frac{1}{N_v} + \frac{1}{N_e} \quad (15)$$

また、文献10)、11)より式(15)は次式のような簡易な式で表現することもできる。

$$\frac{1}{N_{ve}} = \frac{1}{N_v} \cdot \left\{ 1 + \frac{I_v}{I_e} \beta \right\} \quad (16)$$

$$\text{ただし、} \quad \beta = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 L^2}{\pi^2}} \quad (17)$$

である。

4. 2 不完全合成はりの座屈解析に関する一本の微分方程式の誘導

ある部材端に軸方向圧縮荷重 P を受ける部材の力のつり合い方程式は次のようである。

$$EI_v \frac{d^4 W}{dx^4} = -P \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (18)$$

これは、座屈後の圧縮材のつり合い式 $EI_v \frac{d^2 W}{dx^2} + PW = 0$ を x でさらに2回微分した形となっているが、次のような意味をもっている。座屈して曲がった状態のある部材の微小要素 dx を取り出すと、図-4のように、 x 方向の荷重 P は部材軸直角方向の分力

$$P \frac{dW}{dx} - P \left(\frac{dW}{dx} + \frac{d^2 W}{dx^2} dx \right) = -P \frac{d^2 W}{dx^2} dx \quad (19)$$

をもたらし、単位長さあたりには

$$p = -P \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (20)$$

なる横荷重となる。つまり、式(20)より式(2)の右辺の第2項は次のように変わることが分かる。

$$\left(\frac{nI_v}{nI_2 + nI_1} \right) \cdot p = - \left(\frac{nI_v}{nI_2 + nI_1} \right) \cdot N_{ve} W_{ve}'' \quad (21) \quad \text{図-4 微小部材の力のつり合い}$$

また、式(2)の右辺の第1項は等分布荷重 p によって完全合成はりに生じた曲げモーメント $M_{vv} = -E_2 I_v \cdot W_v''$ である。同じく式(20)より $p = -N_v \cdot W_v''$ であり、

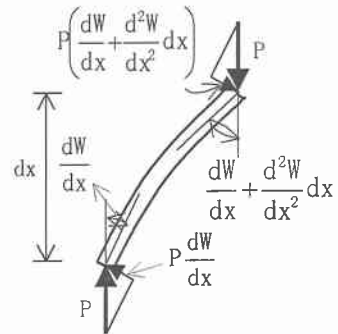
$$W_v'' = -\frac{p}{N_v} \quad (22)$$

とおくことが出来る。ここでの p は不完全合成はりに生じる単位長さあたりの横荷重に相当する。つまり、

$$p = -N_{ve} \cdot W_{ve}'' \quad (23)$$

である。式(23)を式(22)に代入すれば、次の式(24)が成り立つ。

$$W_v'' = -\frac{N_{ve}}{N_v} \cdot W_{ve}'' \quad (24)$$



したがって、不完全合成はり（両端単純支持の場合）の座屈荷重を N_{ve} とし、式（21）と式（24）を式（2）に代入すれば、次式のようになる。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} - E_2 I_v \kappa^2 \cdot W_{ve}'' = -E_2 I_v \kappa^2 \cdot \frac{N_{ve}}{N_v} \cdot W_{ve}'' - \frac{n I_v}{(n I_2 + I_1)} \cdot N_{ve} \cdot W_{ve}'' \quad (25)$$

この式（25）が不完全合成はりの座屈解析に関する1本の微分方程式であり、著者らの誘導したものである。さらに、式（25）は次式のように表示することができる。

$$E_2 I_v \cdot W_{ve}^{IV} + \eta \cdot W_{ve}'' = 0 \quad (26)$$

ここで、
$$\eta = \left[\left(\frac{E_2 I_v \kappa^2}{N_v} + \frac{n I_v}{(n I_2 + I_1)} \right) N_{ve} - E_2 I_v \kappa^2 \right] \quad (27)$$

である。 η は不完全合成はりに作用する軸力に相当するものである。式（26）は単純支持で等断面のような場合、固有値問題として解くことができる。また、有限要素法でも解析できる。

4. 3 二つの解析手法の比較検討

次の三通りの方法によって、座屈荷重を求めた。一つ目は式（26）、（27）より固有値問題として求めた座屈荷重（1本の微分方程式による）、二つ目は式（26）を有限要素解析で求めた座屈荷重（1本の微分方程式による）、三つ目は式（15）で求めた座屈荷重（2本の微分方程式による）である。それらの結果を表一2に示す。

表一2から、式（26）、（27）による値は、有限要素解析による値（8要素分割以上であれば）また式（15）による値と同じであることが分かる。ただし、バネ定数 $k=50\text{kgf/cm}^2$ とし、境界条件はすべて両端単純支持とした。詳細の計算結果は示していないが、他のバネ定数の場合も三通りの方法で求めた座屈荷重は一致している。

なお、有限要素法を用いた理由は、変断面はり、バネ定数の値、ジベルの配置間隔が異なった場合などの解析に用いるために、ここでは簡単な等断面はりでチェックした。

表一2 不完全合成はりの座屈荷重の計算結果

両端単純支持		η	N_v	N_e	N_{ve}
式（26）による解		1.1192×10^5	1.1192×10^5	—	4.7083×10^4
有限要素解析による解	1要素	1.3608×10^5	—	—	5.4081×10^4
	4要素	1.1198×10^5	—	—	4.7099×10^4
	8要素	1.1192×10^5	—	—	4.7083×10^4
式（15）による解		—	1.1192×10^5	8.1273×10^4	4.7083×10^4

（単位：kgf）

5. 不完全合成はりの座屈解析に関する簡易微分方程式

不完全合成はりの合成度を与えて断面二次モーメントの低減を考慮した不完全合成はりの曲げ解析ができる簡易微分方程式は文献7）に示されており、ここでは不完全合成はりの座屈解析に関する簡易微分方程式を示す。文献7）、8）から分かるように不完全合成はりの合成度 α を表す諸式は次のようなものである。 β の値は式（17）であり、 $\alpha = 1 - \beta$ とする。

$$W_{ve} = W_v + W_e = W_v \cdot \left(1 + \frac{W_e}{W_v} \right) = W_v \cdot (1 + \gamma) \quad (28)$$

また、
$$\gamma = \frac{W_e}{W_v} = \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta = \frac{A_1 S_1 S}{n I_2 + I_1} \cdot \beta = \frac{A_1 S_1 S}{n I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha) \quad (29)$$

である。したがって、式(16)より式(29)の γ を用いれば、次式が得られる。

$$N_{ve} = \frac{N_v}{(1+\gamma)} \quad \text{-----} \quad (30)$$

式(30)の意味するところは、完全合成はりの場合の座屈荷重 N_v と γ を求めれば、不完全合成はりの場合の座屈荷重 N_{ve} が簡単に求められることを示している。

なお、式(25)あるいは式(26)を変形すれば、次のような形の微分方程式になる。

$$E_2 I_{vv} \cdot W_{ve}^{IV} + N_{ve} \cdot W_{ve}'' = 0 \quad \text{-----} \quad (31)$$

ただし、
$$I_{vv} = \frac{I_v}{(1+\gamma)} = \frac{(I_{12} + I_{12v}) \cdot (I_{12})}{I_{12} + (1-\alpha) \cdot I_{12v}} \quad \text{-----} \quad (32)$$

$$I_v = I_{12} + I_{12v} \quad ; \quad I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{n} \quad ; \quad I_{12v} = \frac{A_1 S_1 S}{n} \quad \text{-----} \quad (33)$$

である。ここで、断面二次モーメント I_{vv} は不完全合成はりの場合の換算断面二次モーメントであり、 I_v は完全合成はりの場合の断面二次モーメントである。例えば、合成度80%とした場合の計算法は式(32)の α を0.8として I_{vv} を求めれば、不完全合成はりの座屈荷重を求めることができる。

6. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 不完全合成はりの曲げ解析と座屈解析に関する常微分方程式を系統的に表示することができた。
- (2) それらの解析理論を2本の常微分方程式として解く場合と1本の常微分方程式として解く場合とを理論的解析および数値解析により比較検討した結果の値が一致することを確認した。
- (3) 不完全合成はりの座屈解析に関する微分方程式を、簡易的な微分方程式(式(31))で表示できる。
すなわち、合成度 α を用いて座屈荷重を求めることができる。

【参考文献】

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) NCB 研究会編：新しい合成構造と橋、1996。
- 3) N. M. Newmark, C. P. Siess and I. M. Viest: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951。
- 4) 島田 静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。
- 5) 佐藤浩一、渡辺 昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989。
- 6) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A, pp.1223-1236, 1990。
- 7) 佐藤浩一、井上稔康、安念秀剛：合成桁の曲げ剛性に関する一考察、土木学会北海道支部論文報告集、第49号、pp.66-72、1993。
- 8) 佐藤浩一、及川昭夫、小幡卓司、平沢秀之：合成桁の合成度とその適用について、土木学会北海道支部論文報告集、第49号、pp.79-82、1993。
- 9) Koichi SATO: Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991。
- 10) Koichi SATO: Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992。
- 11) 佐藤浩一：不完全合成板の簡易計算法について、土木学会第47回年次学術講演会、pp.332-333, 1992。
- 12) 日本鋼構造協会編：頭付きスタッドの押抜き試験方法(案)とスタッドに関する研究の現状、1996。
- 13) 構造力学公式集、土木学会編、1986。