

I-48

3次元応力解析のための節点プリズム要素

函館工業高等専門学校 正会員 渡辺 力

長岡技術科学大学 正会員 林 正

函館工業高等専門学校 松田 真宜

1. まえがき

有限プリズム法¹⁾は、変位関数の直交性を利用して効率よく計算することができるので、大次元の問題となる3次元応力解析に対して有効な解析手法である。しかし、この解法を中間支点や隔壁を有する構造に適用する場合、解析が煩雑となりその適用範囲は形状の単純な構造に限定される。

これらの問題を克服するために、有限プリズム要素に節点自由度を付加した節点プリズム法(NPM)が開発されている²⁾。この解法では、有限プリズム法の計算効率と有限要素法の汎用性の長所を合わせ持ち、境界条件の処理や有限要素、骨組要素との結合も容易で、複雑な部材構成を持つ大型構造物の解析に有効である。しかし、この節点プリズム要素の一般化変位にはバブル節線(内部節線)を用いていたので、ソリッド有限要素を解析に組入れる場合には、要素境界面で変位の適合条件が満たされず、有限要素との結合に問題が生じる。

本報告では、一般化変位にバブル節線の代わりに中間節線を用いた要素を開発し、有限要素との結合を検証する。板厚方向の複雑な応力分布に対して精度を改善する目的で、断面内に1次、2次、3次、4次の形状関数を用いた要素を開発し、これらの要素を厚板の解析に用いて、精度と収束性、板厚方向応力分布、有限要素との結合を検証した結果を報告する。

2. 節点プリズム要素

3次元応力解析に用いる節点プリズム要素として、図-1(a)に示す8個の節点と4本の節線をもつ1次要素、図-1(b)に示す16個の節点と8本の節線を有する2次要素、図-1(c)に示す24個の節点と12本の節線を有する3次要素、図-1(d)に示す24個の節点と12本の節線を有する4次要素の4つの要素を用いる。これらの要素では、節線は相対する節点に結合されているものとし、これらの親要素の図心点に正規座標 (ξ, η, ζ) を定め、その変域を $[-1, 1]$ とする。なお、4次要素では、節点と節線を多く設けることは実用性を欠くことと、10節点と6節線の節点帯板要素³⁾との結合を考えて図-1(d)のように節点と節線を配置する。

要素の自由度として、節点と節線の要素座標軸 (x, y, z) 方向の並進変位 u, v, w を用いる。これより、節点 n の一般化変位 d_n と、節線 i の第 m 項に関する一般化変位 d_{im} を次式で与える。

$$d_n = \{u_n \quad v_n \quad w_n\}^T, \quad d_{im} = \{u_{im} \quad v_{im} \quad w_{im}\}^T \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

ここに、 $\{\quad\}^T$ は転置記号である。

式(1)を要素の全節点と全節線について集めたものを、それぞれ d_0, d_m として次式で表す。

$$d_0 = \{d_1^T, d_2^T, \dots, d_N^T\}^T, \quad d_m = \{d_{1m}^T, d_{2m}^T, \dots, d_{Lm}^T\}^T \quad (2)$$

ここに、 N は要素の節点数で、 L は要素の節線数である。

任意点 (ξ, η, ζ) の変位成分は、節点変位と節線変位の和によって次式で表される。

$$u = u_0 + u_l, \quad v = v_0 + v_l, \quad w = w_0 + w_l \quad (3)$$

FINITE NODE-PRISM ELEMENTS FOR 3-D STRESS ANALYSIS

By Chikara WATANABE, Masa HAYASHI and Masanori MATSUDA

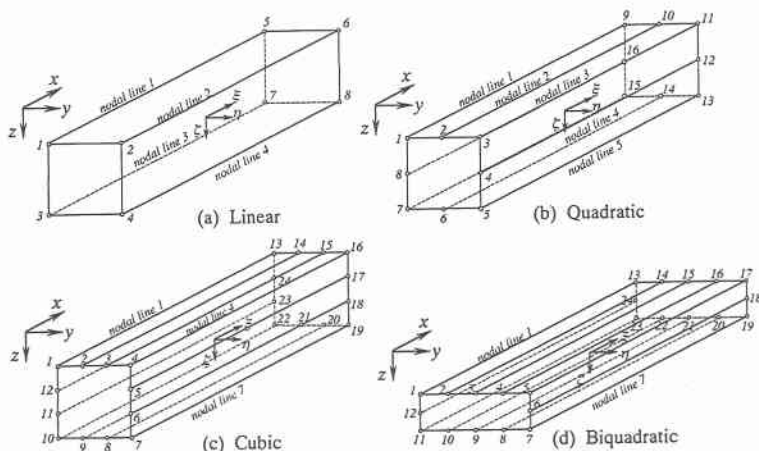


図-1 節点プリズム要素（親要素）

ここに、添字 $()_0$ は節点の変位による成分、 $()_l$ は節線の変位による成分を表す。

まず、節点の変位関数を次式で仮定する。

$$u_0 = \sum f_{un}^T d_n \equiv \{f_{01}\}^T d_0, \quad v_0 = \sum f_{vn}^T d_n \equiv \{f_{02}\}^T d_0, \quad w_0 = \sum f_{wn}^T d_n \equiv \{f_{03}\}^T d_0 \quad (4)$$

ここに、 Σ は節点 n に関する総和を表す。

次に、節線の変位関数を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_l &= \sum \sum X_m f_{ul}^T d_{lm} \equiv \{f_{11}\}^T \sum X_m d_m, & v_l &= \sum \sum X_m f_{vl}^T d_{lm} \equiv \{f_{12}\}^T \sum X_m d_m \\ w_l &= \sum \sum X_m f_{wl}^T d_{lm} \equiv \{f_{13}\}^T \sum X_m d_m \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、二重和 $\sum \sum$ は、節線 l と級数項 m に関する総和を表す。

f_{0i} と f_{li} は、要素に応じて有限要素と同じセレンディピティ族の形状関数を集めたもので、 X_m には多項式の級数²⁾を用いる。

3. 数値計算例

(1) 単純はりの解析

図-2 に示す等分布荷重 q を受ける単純支持はり（ヤング率 $E=10.0$ 、ポアソン比 $\nu = 0.25$ ）の応力解析を行って、各要素の収束性を調べる。要素分割は、図-2 (b) に示すようにはりの $1/2$ 領域を級数方向に 2 分割し、横断面内に 2×2 分割する。表-1 には、支間中央 (A-A 線上) での垂直応力 σ_x, σ_z の計算結果を示す。比較のため 2 次元弾性論の厳密解と横断面の形状関数に節点プリズム要素と同じ 1 次、2 次、3 次式を用いた有限プリズム法⁴⁾ による解も示してある。

応力 σ_x, σ_z とともに、級数に 3~5 項用いればほぼ収束しており、 σ_x の収束値は 1 次要素で 1.1% の誤差であるが、2 次、3 次、4 次要素では 1% 以下と精度の良い値が得られている。また、応力 σ_z は低次要素でかなり誤差を生じているが、高次になるに従い誤差は減少しており、3 次要素で 2% 程度、4 次要素で 1% 以下となっている。低次要素でこれらの誤差を減少させるためには、さらに要素分割を行う必要がある。

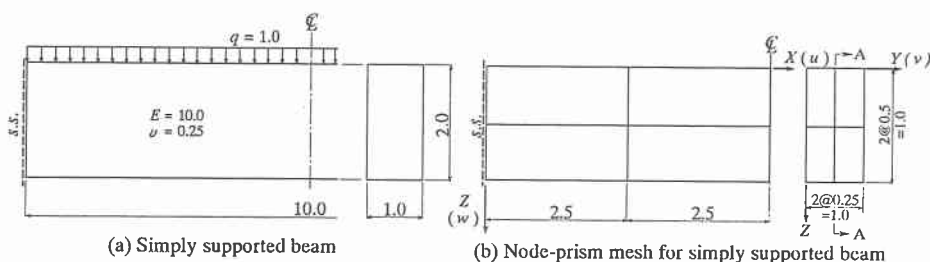


図-2 単純支持はり

表-1 単純支持はりの応力

Method	element	terms	σ_x					σ_z				
			Z=0.0	Z=0.5	Z=1.0	Z=1.5	Z=2.0	Z=0.0	Z=0.5	Z=1.0	Z=1.5	Z=2.0
NPM	Linear	1	-19.772	-9.473	0.009	9.474	19.756	-3.560	-0.803	-0.497	-0.195	2.559
		2	-19.216	-9.206	0.000	9.206	19.215	-3.428	-0.758	-0.500	-0.242	2.429
		3	-19.174	-9.186	-0.001	9.186	19.176	-3.422	-0.758	-0.500	-0.242	2.423
		4	-19.176	-9.187	0.000	9.187	19.176	-3.423	-0.758	-0.500	-0.242	2.423
		5	-19.176	-9.187	0.000	9.187	19.176	-3.423	-0.759	-0.500	-0.242	2.423
	Quadratic	1	-19.468	-9.612	-0.003	9.624	19.452	-1.115	-0.782	-0.519	-0.211	0.154
		2	-19.042	-9.272	-0.007	9.278	19.048	-1.101	-0.784	-0.505	-0.211	0.116
		3	-18.974	-9.270	-0.003	9.273	18.979	-1.098	-0.783	-0.502	-0.215	0.102
		4	-18.978	-9.272	-0.001	9.272	18.979	-1.102	-0.784	-0.500	-0.215	0.103
		5	-18.980	-9.272	0.000	9.272	18.980	-1.104	-0.784	-0.500	-0.216	0.104
	Cubic	1	-19.438	-9.622	0.002	9.629	19.423	-1.060	-0.796	-0.506	-0.211	0.117
		2	-19.038	-9.299	-0.001	9.301	19.041	-1.001	-0.854	-0.496	-0.151	0.028
		3	-18.964	-9.295	0.002	9.294	18.969	-1.009	-0.843	-0.497	-0.160	0.022
		4	-18.966	-9.295	0.002	9.294	18.968	-1.016	-0.842	-0.498	-0.159	0.021
		5	-18.968	-9.295	0.001	9.294	18.968	-1.019	-0.841	-0.499	-0.159	0.021
	Biquadratic	1	-19.436	-9.613	0.001	9.620	19.424	-1.069	-0.797	-0.509	-0.208	0.132
		2	-19.027	-9.301	-0.003	9.301	19.032	-0.967	-0.854	-0.502	-0.151	0.004
		3	-18.956	-9.296	-0.002	9.294	18.962	-0.982	-0.843	-0.503	-0.160	0.002
		4	-18.960	-9.297	-0.002	9.294	18.962	-0.991	-0.842	-0.503	-0.160	0.001
		5	-18.961	-9.296	-0.003	9.294	18.962	-0.995	-0.841	-0.502	-0.160	0.001
FPM ⁹⁾	Linear	11	-19.153	—	0.003	—	19.157	-3.041	—	-0.500	—	2.413
	Quadratic	11	-18.832	-9.212	0.003	9.207	18.846	-1.077	-0.789	-0.500	-0.216	0.100
	Cubic	11	-18.759	—	0.002	—	18.785	-0.990	—	-0.503	—	0.017
Exact ⁹⁾			-18.950	-9.288	0.000	9.288	18.950	-1.000	-0.844	-0.500	-0.156	0.000

(2) 周辺固定スラブの解析

図-3 に示す短辺 a と高さ h が等しい長方形スラブを計算し、各要素の板厚方向の応力分布と有限要素との結合を検証する。比較解には、20 節点 6 面体要素を用いて、1/4 領域を $10 \times 5 \times 10$ と細分割した FEM の図心点応力を用いる。

a) 板厚方向の応力分布

各要素の板厚方向の応力分布を調べるために、図-3 (a) に示すようにスラブの 1/4 領域を断面内に 4×4 に分割し、級数方向 (X 軸方向) に 2 分割したときの断面 A-A ($X=0.95, Y=0.45$) での応力分布図を図-4 に示す。また、○印は有限要素解である。

級数には 1, 3, 5 項を用いているが、級数に 1 項用いただけでどの要素でもほぼ収束しており、図-4 では 3 本の線が重なっている。1 次要素では、応力分布を 1 次式でしか表現できないために σ_z と τ_{yz} でかなりの誤差を生じており、要素間で応力が不連続となっている。2 次要素では FEM とよく一致しており、要素間ではほぼ応力も連続している。また、3 次要素では応力分布も滑らかとなり、要素間で応力の平滑化を必要としないことがわかる。

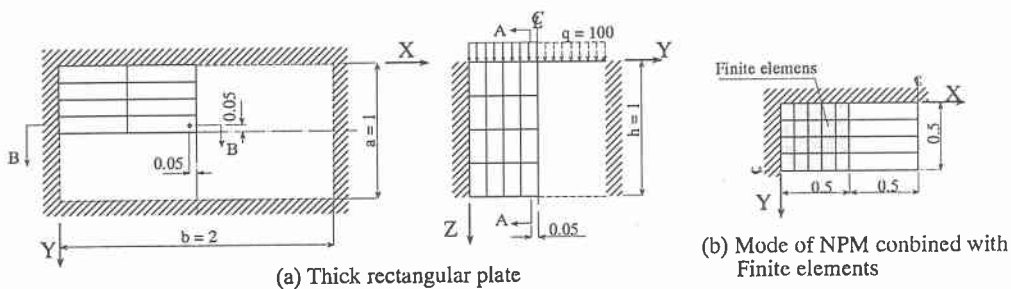


図-3 長方形スラブ

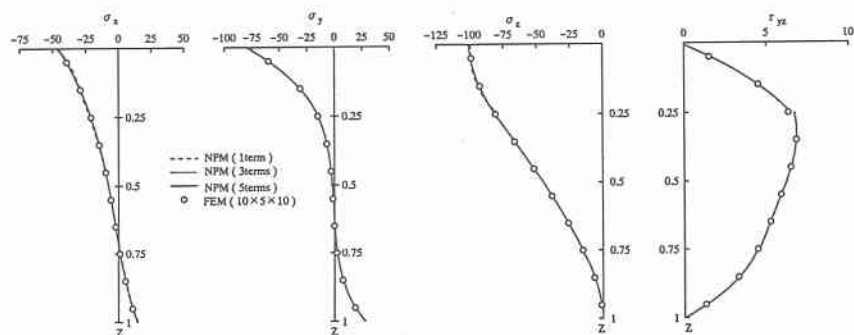
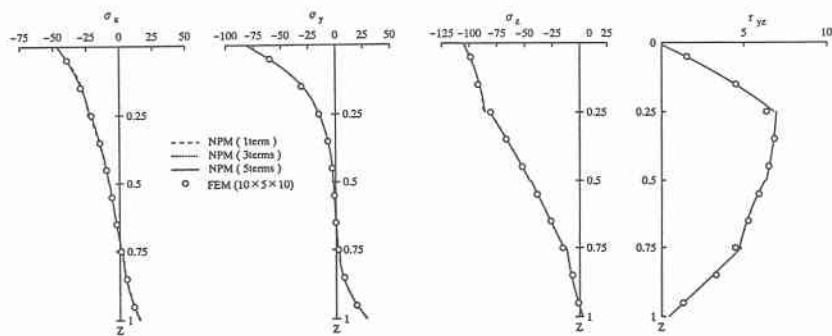
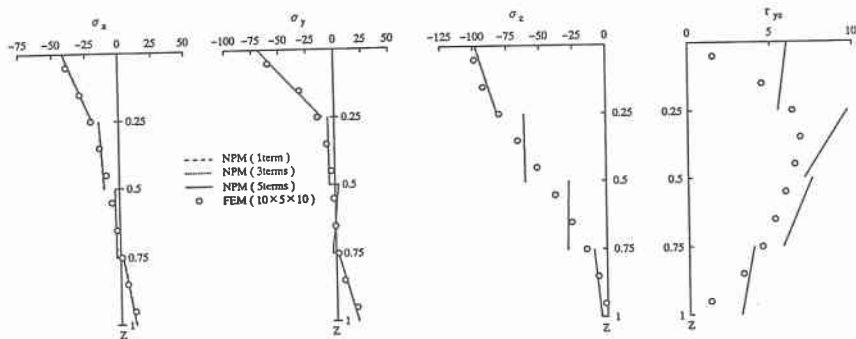


図-4 A-A断面の応力分布

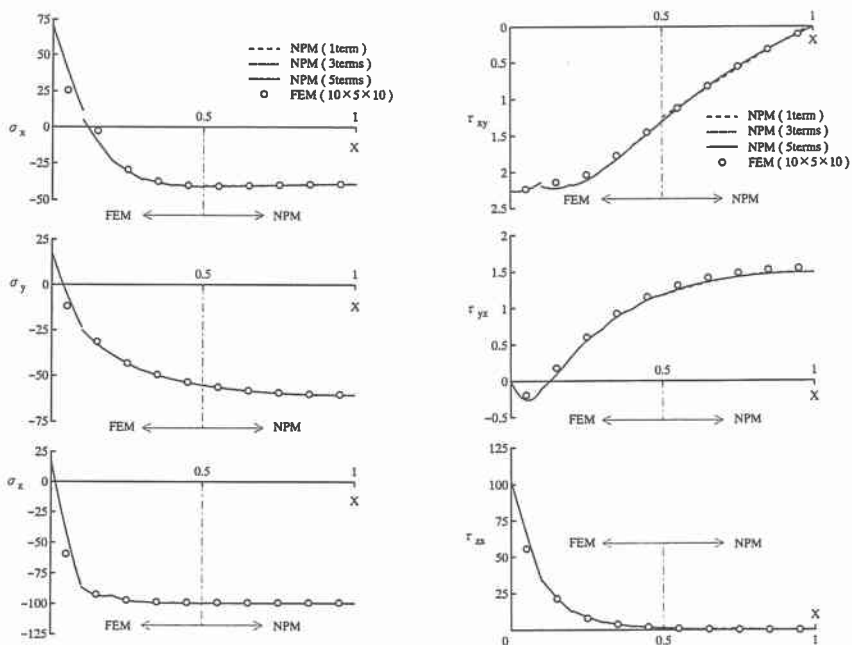


図-5 有限要素と結合したときの応力（断面 B-B）

b) 有限要素との結合

有限要素との結合を調べるために、図-3 (b) に示すように、1/4 領域の半分を $5 \times 4 \times 4$ (x, y, z) に分割した 20 節点 6 面体有限要素で、残りの半部分を $1 \times 4 \times 4$ に分割した 2 次の節点プリズム要素を用いて解析する。断面 B-B 線上の応力 ($Y=0.45, Z=0.05$) を図-5 に示す。

級数には 1, 3, 5 項を用いているが、a) と同様に級数に 1 項用いただけでほぼ収束しているの、図-5 では 3 本の線が重なっている。垂直応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 、せん断応力 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とともに FEM の図心点応力と良く一致しているが、固定端側の結合させた FEM の応力分布は、平滑化を行っていないために、要素間で不連続となっているところがみられる。また、NPM と FEM との結合部では、応力は連続しており、FEM との結合に関しても問題はない。

以上の計算例では、応力の平滑化は行っていない。

4. 結 論

一般化変位に中間節線を用いた節点プリズム要素を数値計算例により検討した結果から次のことが言える。

- (1) 一般化変位に中間節線を用いた節点プリズム要素では、解の収束性が良く、断面内の形状関数の次数を上げることで板厚方向の複雑に変化する応力分布を精度良く表現できる。また、形状関数に低次関数を用いた低次要素では、厚板方向の応力分布が要素間で不連続となっているので、応力の平滑化を行う必要があるが、高次要素では応力が連続し、応力の平滑化を必要としない。
- (2) この要素では、有限要素との結合にも問題はなく、有限プリズム法の適用範囲を大幅に拡張できる。

参考文献

- 1) Cheung, Y.K. : *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976.
- 2) 林 正・小林亨市 : 節点プリズム法による3次元応力解析, 土木学会論文集, NO.450/I-20, pp.95-101, 1992.
- 3) 林 正・渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の立体解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.435-442, 1995.
- 4) Cheung, M.S. and Chan, M.Y.T : Three-Dimensional Finite Strip Analysis of Elastic Solids, *Computer & Structures*, Vol.9, pp.629-638, 1978