I －47

軸対称変形をする円柱直交異方性体の熱弾性ポテンシャルについて

北見工業大学　フェロー　奥村　勇
静岡大学工学部　非会員　野田直剛

1．緒　言

異方性体には、種々の部類があるが、材料の実用的視点から、横等方性体、直交異方性体及び円柱異方性体が重要な異方性体になっている。この中、横等方性体については、２つの熱弾性ポテンシャルを用いた解が直交座標及び円柱座標において、既に発見されている[1)－3)]。また、直交異方性体についても、３つの熱弾性ポテンシャルによる解が求められている[4)]。然しながら、円柱異方性体の一般的形式による３次元熱弾性解は未だに発見されていない様である。円柱異方性体においても、３つの弾性対称面を持ち、９つの独立な弾性定数を持つ直交異方性体が考えられ、本研究においては、それを円柱直交異方性体と呼ぶ。円柱直交異方性体の熱弾性解は、一般的な解法によれば、熱弾性ポテンシャルを用いて求めることになる。然しながら、非軸対称問題は、熱弾性ポテンシャルの支配方程式における係数が余りにも不揃いになり、熱弾性ポテンシャルを用いた効果が殆ど現れない程に難解である。他方、軸対称問題は、θ 成分が欠落するため、熱弾性ポテンシャルの支配方程式の連成が解き易い形になり、比較的容易に解が求められる。

本研究は、軸対称変形をする円柱直交異方性体の熱弾性ポテンシャルを求めるものである。軸対称問題は熱弾性ポテンシャルによる変位成分の仮定が簡明であり、また、熱弾性ポテンシャルの２元連立偏微分方程式が、演算子を用いて、単一の偏微分方程式に簡単に分解される。

2．ひずみ－変位関係及び応力－ひずみ関係

円柱座標（r,θ,z）を用いて、ひずみ成分及び変位成分を、それぞれ、ε_{ij} 及びu_iで表すと、軸対称問題におけるひずみ－変位関係は、次式で表される。

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \varepsilon_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\quad \varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{r\theta}=0 \qquad (1\,a-e)$$

また、円柱直交異方性体の熱を考慮した応力―ひずみ関係は、次式で表さられる。

$$\sigma_{rr}=c_{11}\varepsilon_{rr}+c_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{13}\varepsilon_{zz}-\beta_1 T,\quad \sigma_{\theta\theta}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{22}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{23}\varepsilon_{zz}-\beta_2 T \qquad (2\,a,\ b)$$

$$\sigma_{zz}=c_{13}\varepsilon_{rr}+c_{23}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{33}\varepsilon_{zz}-\beta_3 T,\quad \sigma_{zr}=2c_{55}\varepsilon_{zr},\quad \sigma_{\theta z}=\sigma_{r\theta}=0 \qquad (2\,c-e)$$

ここで、$\sigma_{ij},c_{ij},\beta_i$ 及びTは、それぞれ、応力成分、弾性定数、材料定数及び温度変化を表す。

3．変位のつり合い方程式

軸対称問題における応力のつり合い方程式は、次式となる。

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0 \qquad (3\,a,\ b)$$

ひずみ－変位関係（１ａ－ｄ）を用いて、式（２ａ－ｄ）の応力成分を変位成分で表し、それらを応力のつり合い方程式（３ａ，ｂ）に代入すると、変位のつり合い方程式が次の様に得られる。

$$c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-c_{22}\frac{u_r}{r^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\left(c_{13}+c_{55}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}+\left(c_{13}-c_{23}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$=\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r} \qquad (4\,a)$$

On thermoelastic potentials to cylindrically orthotropic solids in an axi-symmetric deformation field　　by Isamu A. OKUMURA and Naotake NODA

$$c_{55}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(c_{13}+c_{55}\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\left(c_{23}+c_{55}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}=\beta_3\frac{\partial T}{\partial z} \tag{4 b}$$

4．熱弾性解の誘導

2つの熱弾性ポテンシャルϕ 及びψ を用いて、変位成分を次式の様に仮定する。

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_z=k\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{5 a, b}$$

ここで、kは、後に定める定数を表す。変位成分（5 a，b）を変位のつり合い方程式（4 a，b）に代入すると、熱弾性ポテンシャルの支配方程式が、次の様に得られる。

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{55}+k\left(c_{13}+c_{55}\right)}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{c_{11}}\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r}\right] \tag{6 a}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{33}k}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{55}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\beta_3 T}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}} \tag{6 b}$$

いま、支配方程式（6 a，b）の各々の左辺における第3項に着目して、

$$k=\frac{c_{11}\nu-c_{55}}{c_{13}+c_{55}},\quad \frac{c_{33}k}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}=\nu \tag{7 a, b}$$

と置き、式（7 a）の定数kを式（7 b）に代入すると、νを定める次の2次方程式を得る。

$$c_{11}c_{55}\nu^2+\left[c_{13}\left(c_{13}+2c_{55}\right)-c_{11}c_{33}\right]\nu+c_{33}c_{55}=0 \tag{8}$$

支配方程式（6 a，b）に式（7 a，b）を代入し、

$$\Phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{9}$$

と置くと、支配方程式（6 a，b）は、次の様に変形される。

$$L_1\psi=F_1,\quad L_2\psi=F_2 \tag{10 a, b}$$

ここで、

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right),\quad L_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{11 a, b}$$

$$F_1=-\frac{c_{11}}{c_{13}+c_{55}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{c_{13}+c_{55}}\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r}\right] \tag{12 a}$$

$$F_2=-\frac{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\left(\Phi-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\beta_3}{c_{55}}T \tag{12 b}$$

式（1 0 a，b）は、ϕ 及びψ に関する2元連立偏微分方程式であるが、次の様にして、その連成を解く。

式（1 0 a）及び式（1 0 b）に、それぞれ、L_2 及び L_1 をかけると、次式となる。

$$L_2L_1\psi=L_2F_1,\quad L_1L_2\psi=L_1F_2 \tag{13 a, b}$$

式（1 3 a）から式（1 3 b）を減じ、その結果にr^2 をかけると、次式となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)\psi=r^2\left(L_2F_1-L_1F_2\right) \tag{14}$$

上式の左辺における第１項は、連成を解くために不都合な項であるので、それを消去する。式（１０ａ）に（$c_{55}-c_{13}+2c_{23}$）／（$c_{13}+c_{55}$）をかけると、次式となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\left(c_{13}-c_{23}\right)\left(c_{55}-c_{13}+2c_{23}\right)}{\left(c_{13}+c_{55}\right)^2}\frac{1}{r}\right]\psi=\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}F_1 \tag{15}$$

式（１４）から式（１５）を減じ、その結果にrをかけると、次式となる。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\left(c_{13}+c_{55}\right)^2}{2\left(c_{13}-c_{23}\right)^2}\left[r^3\left(L_2F_1-L_1F_2\right)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}rF_1\right] \tag{16}$$

式（１０ａ）をzで２回微分して、その結果に上式を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right]\left(L_2F_1-L_1F_2\right)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)F_1\\&\quad=0\end{aligned} \tag{17}$$

上式におけるF_1及びF_2は、ϕのみの関数であるので、上式によって、２元連立偏微分方程式の連成が解けたことになる。式（１７）及び式（１６）に式（１２ａ，ｂ）及び式（１１ａ，ｂ）を代入すると、結果としての熱弾性ポテンシャルが次の様に得られる。

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right]\Bigg\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]\\&\quad-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)\left(\Phi-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\Bigg\}\\&\quad-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]\\&\quad=\frac{1}{c_{11}}\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right]\Bigg\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r}\right]-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\beta_3\\&\quad\times\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)T\Bigg\}-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{11}\left(c_{13}+c_{55}\right)}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)\Bigg[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}\\&\quad+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r}\Bigg]\end{aligned} \tag{18a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=&-\frac{c_{11}\left(c_{13}+c_{55}\right)}{2\left(c_{13}-c_{23}\right)^2}r\Bigg\{\left[r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right]\Bigg[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\Bigg(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\\&\times\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{k\left(c_{13}-c_{23}\right)}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\Bigg)\Bigg]-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\frac{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}{c_{11}}r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)\\&\times\left(\Phi-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c_{11}}\left[r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right]\\&\times\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)\frac{T}{r}\right]+\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\frac{\beta_3}{c_{11}}r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)T\Bigg\}\end{aligned} \tag{18b}$$

５．等方性体への還元

等方性体の時には、弾性定数及び材料定数に次の関係がある。

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}\ , c_{13} = c_{23} = c_{12}\ , c_{55} = (c_{11} - c_{12})/2\ , \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = c_{11}\alpha(1+\nu)/(1-\nu) \quad (19\mathrm{a-d})$$

ここで、α 及びνは、それぞれ、等方性体の線膨張係数及びポアソン比を表す。また、式（8）の根ν及び式（７a）の定数kは、それぞれ、$\nu = 1$及び$k = 1$となるので、関係式（１９ａ－ｄ）を支配方程式（１８ａ）に代入すると、次式を得る。

$$\Phi = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}T\ , \quad 即ち、\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}T \quad (20)$$

上式におけるϕ は、軸対称問題における Goodier の熱弾性ポテンシャルに一致している。式（１８ｂ）の右辺は、不定となり、ψ が定められないので、式（１０ａ）を用いると、次式を得る。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0\ , \quad 即ち、\psi = 0 \quad (21)$$

上式は、等方性体の時にψ が熱弾性ポテンシャルとして不要になることを示している。

６．結　語

軸対称問題における円柱直交異方性体の熱を含む変位のつり合い方程式を２つの熱弾性ポテンシャルを用いて解き、熱弾性解を求めた。式（１０ａ，ｂ）から式（１７）に見る様に、熱弾性ポテンシャルの支配方程式の連成が比較的容易に解かれる。結果としての解（１８ａ）は、相当に複雑な６階の偏微分方程式であるが、ϕ をr のみの関数とz のみの関数とに変数分離した時に、r のみの関数に関する常微分方程式が、Euler 型になれば、具体的な解は、容易に得られる。

非軸対称問題の熱弾性ポテンシャルは、目下、研究中である。３つの熱弾性ポテンシャルを用いることになるが、それらによる変位成分の仮定の適否が最初の難点になる。円柱座標においては、等方性体の時でもベクトルポテンシャルのr 成分とθ 成分との支配方程式が連成する。それ故、円柱直交異方性体における熱弾性ポテンシャルの支配方程式が連成するのは当然ではあるが、熱弾性ポテンシャルによる変位成分の仮定が不適当であれば、支配方程式の連成を解くことは、先ず不可能に近い。３つの熱弾性ポテンシャルを用いた時の３元連立偏微分方程式は、１つの熱弾性ポテンシャルを消去することにより、２元連立偏微分方程式に簡単に帰着するが、その連成を解くことが極めて困難であり、現時点における研究は、その段階で終っている。然しながら、弾性定数の間に３つの関係式を設定して、独立な弾性定数の個数を６つに減じた時の近似円柱異方性体の如きものを考えれば、２元連立偏微分方程式の連成を厳密に解くことができる。その解から、近似円柱異方性体の弾性定数を横等方性体の弾性定数に置き換えると、横等方性体の厳密な熱弾性ポテンシャルが得られる。

参考文献

１） Okumura , I. A. and Noda , N. : Thermoelastic potential functions in transversely isotropic solids and their applications , J. Therm. Stresses , Vol. 14 , No.3 , pp.309-331, 1991.

２） Noda, N., Ashida, F. and Okumura, I.A. : General solution technique for transient thermoelasticity of transversely isotropic solids in Cartesian coordinates, Arch. Appl. Mech., Vol.62, No.5, pp.291-305, 1992.

３） Ashida, F., Noda, N. and Okumura, I. A. : General solution technique for transient thermoelasticity of transversely isotropic solids in cylindrical coordinates , Acta Mecha., Vol.101, pp.215-230, 1993.

４） Okumura , I. A., Noda , N. and Ashida , F. : Three-dimensional , thermoelastic potential functions in orthotropic solids （to be published）.