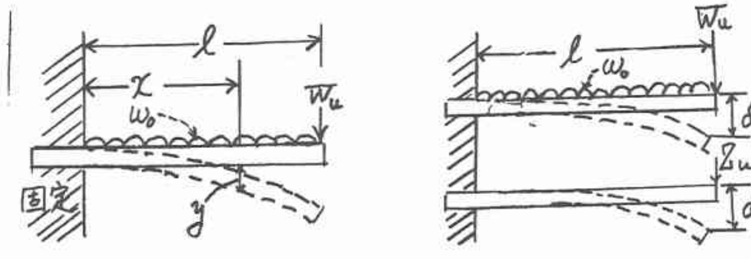
I－39

道路橋示方書Ｖ耐震設計編固有周期Ｔ＝２．０１$\sqrt{\delta}$とする示方のδが含む復元力要素，非復元力要素の解析

ロック建設技術研究所　正会員　今井　芳雄



§１．等分布荷重w_0と先端に集中荷重Ｗｕをうけるｃａｎｔｉｌｅｖｅｒのたわみ曲線。

$$\frac{d^2y}{d\chi^2}=M\chi\,(EI)^{-1}=\{Wu\cdot\ell-Wu\cdot\chi+w_0(\chi^2-2\ell\chi+\ell^2)\times 2^{-1}\}\,(EI)^{-1}$$

$$\frac{dy}{d\chi}=\int\left(\frac{d^2y}{d\chi^2}\right)d\chi=\{Wu\cdot\ell\int d\chi-Wu\int\chi\,d\chi+W_0\ell^2\times 2^{-1}\int d\chi\}\,(EI)^{-1}$$

$$=\{Wu\cdot\ell\cdot\chi-Wu\times 2^{-1}\chi^2+w_0\times 2^{-1}\times 3^{-1}\chi^3-w_0\ell\times 2^{-1}\chi^2+w_0\ell^2\times 2^{-1}\chi+C_1+C_2+C_3+C_4+C_5\}\,(EI)^{-1}$$

$$\left(\frac{dy}{d\chi}\right)\underset{\chi=0}{\cdots\cdots}=\{0+C_1+C_2+C_3+C_4+C_5\}\,(EI)^{-1}=0,\ EI\neq 0$$

∴積分定数$C_1+C_2+C_3+C_4+C_5=0$

$$y=\int\frac{dy}{d\chi}d\chi=\{Wn\cdot\ell\int\chi\,d\chi-Wu\times 2^{-1}\int\chi^2d\chi+w_0\times 6^{-1}\int\chi^3d\chi-w_0\ell\times 2^{-1}\int\chi^2d\chi+w_0\ell^2\times 2^{-1}\int\chi\,d\chi\}\,(EI)^{-1}$$

$$=\{Wu\cdot\ell\times 2^{-1}\chi^2-Wu\times 2^{-1}\times 3^{-1}\chi^3+w_0\times 6^{-1}\times 4^{-1}\chi^4-w_0\ell^2\times 2^{-1}\times 2^{-1}\chi^3+C_6+C_7+C_8+C_9+C_{10}\}\,(EI)^{-1}$$

$(y)\underset{\chi=0}{\cdots\cdots}=0$　∴積分定数$C_6+C_7+C_8+C_9+C_{10}$

$$\therefore y=\{Wu\cdot\ell\times 2^{-1}\chi^2-Wu\times 6^{-1}\times 4^{-1}\chi^4-w_0\ell\,6^{-1}\chi^3+w_0\ell^2\times 2^{-1}\times 2^{-1}\chi^2\}\,(EI)^{-1}$$

$$(y)\underset{\chi=l}{\cdots\cdots}=\{Wu\cdot\ell\times 2^{-1}\ell^2-Wu\times 6^{-1}\ell^3+w_0\ell\times 6^{-1}\ell^3+w_0\ell^2\times 2^{-1}\ell^2\}\,(EI)^{-1}$$

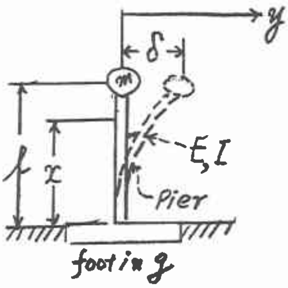
$$=\{Wu\cdot\ell^3\times 3^{-1}+w_0\ell^4(24^{-1}-6^{-1}+4^{-1})\}\,(EI)^{-1}$$

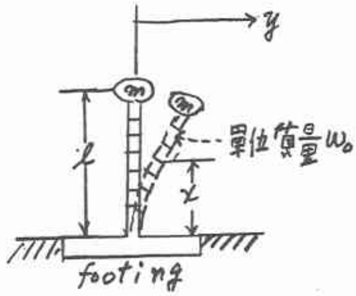
$$=\{Wu\cdot\ell^3\times 3^{-1}+w_0\ell\times\ell^3\times 8^{-1}\}\,(EI)^{-1}$$

たわみ曲線式は$\left(\frac{dy}{d\chi}\right)\underset{\chi=0}{\cdots\cdots}=0$，$(y)\underset{\chi=0}{\cdots\cdots}=0$の２条件のもとに成り立っている。

Anaiysis of factor for strain and nonestrainforces containing in δ of period equation T=2. 01$\sqrt{\delta}$ under road bridgeguid book expℓaining method against eartthquake in partV.

by Yosio Imai





§2．固有振動の微分方程式

固定されたｆｏｏｔｉｎｇに固定された長さℓのｐｉｅｒの上にのる１個の質量ｍの自由振動を考える。ｐｉｅｒは自身の質量なく弾性係数Ｅ（kg，cm^{-2}）とｍｏｍｅｎｔ ｏｆ ｎｅｒｔｉａ Ｉを有している。ｐｉｅｒの頂上ｍのあることろに水平力Ｗｕを加え、δだけ変位して静止釣り合ったとする。すでにみちびいた式 $(y)_{x=l}\cdots\cdots=\{Wu\cdot\ell^3\times3^{-1}+w_0\ell\times\ell^3\times8^{-1}\}(EI)^{-1}$の等分布荷重

$w_0=0$とおいた式$\delta=(y)_{x=l}=Wu\cdot\ell^{-3}\times3^{-1}\times(EI)^{-1}$が得られる。

このとき、$Wu(\delta)^{-1}=k$とおく。このｋは弾性常数（Ｓｐｒｉｎｇ Ｃｏｎｓｔａｎｔ）である。

$\delta=(y)_{x=l}\cdots\cdots=Wu\cdot\ell^3\times3^{-1}\times(EI)^{-1}$であるから、$k=Wu(\delta)^{-1}=Wu\{Wu\cdot\ell^3\times3^{-1}$

$(EI)^{-1}\}^{-1}=\ell^{-3}\cdot3EI$

これをみると加える水平力はＷｕと限らず、その時の変位を知ればやはり$k=\ell^{-3}\cdot3EI$をうる。

この時、質量ｍに関係なくｋが求められた。質量ｍがのった状態からδを解き放せば自由振動がおこる。

ｐｉｅｒのばねのちからで振動は永続する。$m=Wu\cdot g^{-1}$．ｇ＝ｇｒａｖｉｔｙ加速度

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=0$の微分方程式の解が振動の周期（ｐｅｒｉｏｄ）を与える。

定数をＡ，時間をｔ，$w=radian\cdot sec^{-1}$として１つの持解を$y=A\sin wt$とすれば

$\dfrac{dy}{dt}=Aw\cos wt$ $\dfrac{d^2y}{dt^2}=A\cdot w^2(-)\sin wt$ これを代入すると$m\{Aw^2(-)\sin wt\}$

$+kA\sin wt=0$

$\therefore(A\sin wt)(-mw^2+k)=0\quad\therefore-mw^2+k=0\quad\therefore w^2=k\cdot m^{-1}$

他の特解を$y=B\cos wt$とおくと$\dfrac{dy}{dt}=B(-)w\sin wt$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=B(-)w^2\sin wt$

これを代入して$m\{Bw^2(-)\cos wt\}+k\cos wt=0$

$\therefore(B\cos wt)(-mw^2+k)=0\quad\therefore-w^2+k=0\quad\therefore w^2=k\cdot m^{-1}$

定数Ａ，Ｂを初期条件で求める前に$w^2=k\cdot m^{-1}$の解が得られた$\sin wt$，$\cos wt$は、$wt=2\pi$毎に繰り返すから2πとおいた時の周期Ｔであり、$T=2\pi\cdot w^{-1}$が得られる。

質量ｍが上部構造の重量$Wu\times g^{-1}$（ｇ＝ｇｒａｎｉｔｙの加速度）であるせば、$T=2\pi\cdot w^{-1}$

$=2\pi\{(km^{-1})^{\frac{1}{2}}\}^{-1}=2\pi\{Wu\cdot\delta^{-1}(Wu\cdot g^{-1})^{-1}\}^{\frac{1}{2}}=2\pi\cdot g^{-\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}=2.01\delta$

$(g=9.8m\cdot sec^{-2}$，$\delta=meter)$

即ち、$T=2.01\sqrt{\delta}$は$\left(\dfrac{dy}{d\chi}\right)_{x=0}\cdots\cdots=0$，$(y)_{x=0}\cdots\cdots=0$という条件の時、ｐｉｅｒの頂部に水平力

Ｗｕを作用させた時の式であって、別途上部構造の重量Ｗｕを質量になおさなくてもすむと云うだけで

あるｋ・ｙはちからであり、このちからに等しいちからが$m\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}$である。１個の最終ｋが対応している通路橋示方書Ⅴ耐震設計編（３．３．１）式はまさしくこの条件の時にのみ成立する式である。

（解３．３．１）式の様に剛体としての構造物の傾きδ_0，θ_0，k_0は異質のものである。

§３．上部構造の重量とｐｉｅｒの全重量の同時振動

地震水平加速度はｆｏｏｔｉｎｇから、どの高さの点にも同一の地震の加速度を質量に与えるその力を Wu，w_0とみなした時のｐｉｅｒのたわみ曲線式は、χをｆｏｏｔｉｎｇからはかって

$y=\{Wu\cdot\ell\times2^{-1}\chi^2-Wu\times6^{-1}\chi^3+w_0\times6^{-1}\times4^{-1}\chi^4-w_0\ell^2\times2^{-1}\times2^{-1}\chi^2\}(EI)^{-1}$

となる。w_0は等分布荷重だからどのχ点でもw_0だが、変位はyでχ毎に変わって同一でない。

従って、振動の微分方程式のために１つの弾性常数（Ｓｐｒｉｎｇ　Ｃｏｎｓｔａｎｔ）にまとめ切れない。

$(y)\underset{x=0}{\cdots\cdots}=\{Wu\cdot\ell^3\times3^{-1}+w_0\ell\times\ell^3\times8^{-1}\}(EI)^{-1}$これはｃａｎｔｉ$\ell$ｅｖｅｒ先端の沈下量でｐｉｅｒ頭部の水平変位でもある各w_0ごとの弾性常数をある１つのものに表せない$\chi=0$の先端にZu１個の場合の沈下量（ｐｉｅｒの水平変位でもある）を△とおいて、

$\triangle=Zu\cdot\ell^3(3EI)^{-1}$とおいて$\triangle=(y)_{x=1}$とおけば、

$Zu\cdot\ell^3(3EI)^{-1}=\{Wu\ell^3\times3^{-1}+w_0\ell\times\ell^3\times8^{-1}\}(EI)^{-1}$になる。

$\therefore Zu=\{Wu\ell^3\times3^{-1}+w_0\ell\times\ell^3\times8^{-1}\}(EI)^{-1}\times\{\ell^3(3EI)^{-1}\}^{-1}$

$\quad=\{Wu\times3^{-1}+w_0\ell\times8^{-1})(EI^{-1})\}^{-1}=\ell^{-3}(3EI)$

即ち、$m=\dfrac{d^2y}{dt^2}+k\cdot y=0$の微分方程式で近似させうると考える。

$w=radian(sec)^{-1}$である時、この微分方程式の一般解に必要な２個の定数Ａ，Ｂを定める前に$w^2=k\times m^{-1}$が得られるから

$w^2=k\times m^{-1}=\ell^{-3}(3EI)[\{(Wu\times3^{-1}+w_0\ell\times8^{-1})\times3\}\times g^{-1}]^{-1}$

$\qquad=\ell^{-3}\{(Eu\times3^{-1}+w_0\ell\times8^{-1})\}^{-1}\times g\times EI$

ただし、$g=gravty$の加速度$9.8m\cdot sec^{-2}$

$wt=2\pi$この時の$t=T$とおく。$T=$固有振動周期　$T=2\pi\times w^{-1}$

§４．計算例

$\ell=11m,EI=10^7\times3.79(ton)(meter)^2,Wu=424ton$（上部構造の重量）

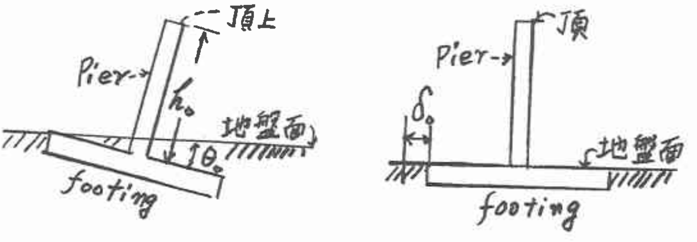
$w_0\ell=189ton$，$g=9.8m\cdot sec^{-2}$の数値の時、

$w^2=k\cdot m^{-1}=\ell^{-3}EI(Wu\times3^{-1}+w_0\ell\times8^{-1})^{-1}\times g$

$=10^{-3}\times1.33^{-1}\times10^7\times3.79\times(141.3+23.6)^{-1}\times9.8m\cdot sec^{-2}$

$=10^2\times16.93$

$\therefore w=(10^2\times16.93)^{\frac{1}{2}}=41.1\quad WT=2\pi\quad\therefore T=2\pi(41.1)^{-1}=0.153sec$



§５．ｐｉｅｒ，ｆｏｏｔｉｎｇが夫々剛体で全構造体が剛体扱い

道路橋示方書Ｖ耐震設計編Ｐ．２２図－解３．３．６耐震設計上の地盤面における荷重と変位（解３．３．５）式におけるδ_0はｆｏｏｔｉｎｇの水平変位、θ_0はｆｏｏｔｉｎｇの回転角と定義されているこの算式の$H_0=Wu+0.8(Wp+W_F)$、$Mo=Wu\cdot h_0+0.8Wp(hp\times 2^{-1}+h_F)+0.8W_Fh_F\times 2^{-1}$

これによってｐｉｅｒ頂部の変位はδ_0とO_0h_0の和（解３．３．１）と求めているが振動の微分方程式$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$からみて$m\frac{d^2y}{dt^2}$は常にＷｕに等しいわけでもないｋ・ｙのｙもδ_0やθ_0h_0と固定したものでもない。$\frac{d^2y}{dx^2}=M\chi(EI)^{-1}$における先端のちからが$m\frac{d^2y}{dt^2}$である時のｙである。

§６．結言

固有振動は質量ｍにはたらく$m\frac{dy}{dt^2}$のちからとばねの復元力$k\times y$がｅｑｕａｌになり乍らの運動である。ｆｏｏｔｉｎｇとｐｉｅｒが剛体として水平変位、回転変位している姿でない。

$T=2.01\sqrt{\delta}$はたまたま上部構造の重量Ｗｕを水平力として得られる弾性常数は任意のちからから求まる弾性常数に等しいからあらためてW_uの質量$=Wu\times g^{-1}$を使わなくてすむという単なる便宜手段であるにすぎない。なんでも変位さえ求まればδに含めて成立するとするは早計である。１９９１年版計算例によれば$T=0.4sec$であって、$0.153sec$とは相当な差力が出ている。

根号内に入れるδは、$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$の微分方程式の解を満す振動の時にのみ適用される可きである