

I - 24

薄肉開き断面桁の3次元固有振動性状

北海道大学院工学研究科 フェロー 林川 俊郎
 北海道大学工学部 学生員 北島 勉
 北海道大学院工学研究科 正 員 平沢 秀之
 北海道大学院工学研究科 フェロー 佐藤 浩一

1. まえがき

近年、橋梁構造物をはじめとする土木構造物はその構造形式が複雑化してきており、それに伴ってその動的応答も予測しにくいものとなってきた。構造物の動的応答に影響を与えるものとしては、走行荷重・風・地震などの構造物に作用する外力の性質と、固有振動数・固有振動モードなどの構造物に固有の振動特性がある。すなわち、動的応答特性を把握するためには固有振動数、固有振動モードを精度よく計算し、構造物の基本的な固有振動性状を調べることが重要である。

一般に立体骨組構造の固有振動解析においては、対象とする構造物のモデル化に際して部材要素を2軸対称断面に仮定しており断面の図心とせん断中心は同一となるため、連成振動は生じない。しかし、実際の立体骨組構造部材は、チャンネル部材やπ形断面などの非対称断面形状を有するものが多く、図心とせん断中心のずれにより曲げとねじりの連成振動が現れると考えられる。すなわち、より正確な振動状態を把握するには断面の非対称性を考慮に入れる必要がある。

また、変断面部材においては、これを分割し直線要素の集合体にモデル化して固有振動解析を行う場合が多い。この方法では、隣り合う要素間での図心やせん断中心の位置が階段状に変化し必ずしも一致しない。そのため、各要素の剛性マトリックス・質量マトリックスを単純に重ね合わせることができず、構造物全体の振動数方程式を組み立てることができない。そこで、要素両端面上の任意の点に関する一般的な剛性マトリックス・質量マトリックスを用意し、隣接要素間で共通の節点を解析点に選ぶことによって解析が可能となる。

そこで本研究の目的は、図心とせん断中心の異なる薄肉断面を有する、等断面および変断面部材からなる3次元骨組桁構造の固有振動解析を行い、得られた固有振動数の精度およびその固有振動特性について検討をするものである。

2. 微分方程式による解(厳密解法)

図心とせん断中心のずれを考慮した等断面桁の厳密な固有振動数の値を得るために、両端単純支持された直線桁の固有振動について考える。ここでは、図1に示すような1軸対称断面(π形断面)を取り上げる。このようなπ形断面はz軸に関して対称であることから、ねじり振動は水平振動を伴う。図心oとせん断中心sとのずれをξとすると、その基礎微分方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$EIz \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad \cdots (1)$$

$$ECw \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m \left(-\xi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad \cdots (2)$$

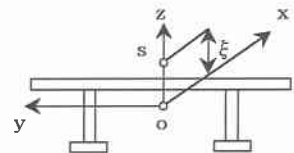


図1 π形断面

Natural Vibration Characteristics of Thin-Walled Beams with Open Cross Section.

by Toshiro HAYASIKAWA, Tsutomu KITAJIMA, Hideyuki HIRASAWA and Koichi SATO

上式において、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 I_z は z 軸に関する断面2次モーメント、 m は単位長さ当たり質量、 C_w はそりねじり定数、 K はSt. Venantのねじり定数、 r は回転半径である。なお x 方向は部材軸方向である。

式(1), (2)を満たすたわみ $v(x, t)$ 、ねじり角 $\theta(x, t)$ は次のようなフーリエ級数で仮定される。

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sin \frac{k\pi}{L} x \cdot \sin \omega t \quad \dots (3)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \omega t \quad \dots (4)$$

ここに、 L は部材長、 ω は固有円振動数である。式(3), (4)を式(1), (2)に代入し直交条件を用いると、最終的に等断面桁のねじり振動に関する固有円振動数は次のように求められる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \quad \dots (5)$$

ここに、 $A = m^2(\xi^2 - r^2)$ 、 $B = m\alpha^2(Elzr^2\alpha^2 + ECw\alpha^2 + GK)$ 、 $C = -Elz\alpha^6(ECw\alpha^2 + GK)$ 、 $\alpha = n\pi/L$ 、($n=1, 2, 3, \dots$)である。

3. 整合質量法による解 (近似解法)

本研究では、変断面部材により構成された構造物を直線要素の集合体にモデル化して固有振動解析を行う。隣接する要素間で図心とせん断中心位置が異なる場合、各要素の剛性マトリックスや質量マトリックスをそのまま重ね合わせることができない。そこで要素両端面上の任意の点に関する一般的な剛性マトリックス、質量マトリックスを用意し、隣接要素間で共通の節点を解析点に選ぶことによって解析が可能となる。図2に示すような直線近似された薄肉断面要素において、任意点P、Qにおける一般化された剛性マトリックスおよび質量マトリックスは変換マトリックス T を用いて式(6)、式(7)のように示される²⁾。

$$[K_{pq}] = [T]^T [K_s] [T] \quad \dots (6)$$

$$[M_{pq}] = [T]^T [M_s] [T] \quad \dots (7)$$

ここで、 $[K_s]$ 、 $[M_s]$ はせん断中心位置における剛性マトリックスおよび質量マトリックスである。

変換マトリックス T は、断面不変の仮定のもとで点P(y_p, z_p)の変位を、せん断中心S(y_s, z_s)の変位で表したものを、マトリックス表示したものである。その詳細は文献2)に示されている。

式(6)と式(7)を用いて要素境界面上で同一の解析点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを計算しておけば、構造物全体について重ね合わせを行うことができる。重ね合わせにより組み立てられた構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスを K 、 M とすると、固有振動解析のための振動数方程式は次のように示される。

$$\det | K - \omega^2 M | = 0 \quad \dots (8)$$

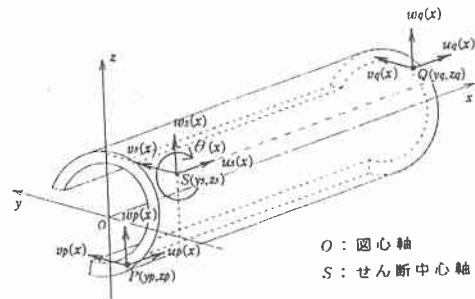


図2 薄肉断面要素

4. 数値解析結果

数値計算例として、図3に示す π 形断面を基本モデルとして、両端単純支持された等断面桁における整合質量法による解と微分方程式による解との比較を行う。さらに、変断面桁の固有振動特性について以下に述べる。

4-1. 等断面桁

図3に示す断面形状を有する等断面直線桁について数値計算を行った。断面諸元は表1に示すものを用い、支間長は40.0m、板厚は12mm、境界条件は両端単純支持である。整合質量法による解析における要素分割数は4、8、14、20分割の4通りとし、微分方程式より得られる厳密解との比較を行った。計算結果を表2に示す。ここで、ねじり振動の厳密解は式(5)より得られるものであるが、縦振動、 $x-z$ 方向曲げ振動（鉛直振動）および $x-y$ 方向曲げ振動（水平振動）の厳密解については以下の式(9),(10),(11)から求められる。

$$\text{縦振動} : \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad \dots (9)$$

$$\text{鉛直振動} : \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{m}} \quad \dots (10)$$

$$\text{水平振動} : \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m}} \quad \dots (11)$$

ここに、 A は断面積、 I_y は y 軸に関する断面2次モーメントである。整合質量法により得られる固有円振動数は、厳密解に対して上界値を与えることが知られているが^{3), 4)}、表2に示す通り全ての固有円振動数において厳密解より大きい値が得られた。また分割数の増加につれて解の誤差が小さくなる傾向にある。縦振動、鉛直および水平曲げ振動の収束は比較的早く、分割数 $N=20$ では誤差0.3%以下の良い精度で解が求められている。しかし、ねじり振動の収束性は縦振動や曲げ振動に比べて遅く、かつ、その精度も悪いことが認められる。

4-2. 変断面桁

図3に示す断面形状において、ウェブ高さを図4のように変化させた4タイプのモデルについて数値解析を行った。その解と連成状態について述べる。

支間長は40.0m、板厚は12mm、要素分割数は40分割としている。固有円振動数の比較を表3に示す。

鉛直振動およびねじり振動においては、解析モデルのタイプが1, 2, 3, 4となるにつれて固有円振動数が大きくなっているのに対し、水平振動では固有円振動数がほとんど変化せず、このことからウェブ高さは水平振動にほとんど影響を及ぼさないと考えられる。また<>内の値はタイプ1における解との比を表している。鉛直振動およびねじり振動の1次モードにおいては、タイプ2はタイプ1に近い固有円振動数が得られ、これに対しタイプ3はタイプ4に近い固有円振動数が得られた。2次、3次モードになるにつれてこの傾向は

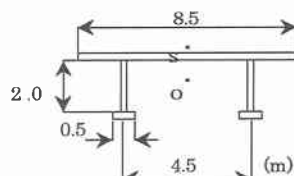


図3 断面形状

表1 断面諸元

A (m^2)	1.62×10^{-1}
I_y (m^4)	8.08×10^{-2}
I_z (m^4)	9.18×10^{-1}
K (m^4)	7.78×10^{-6}
C_w (m^6)	4.87×10^{-1}
m (t/m)	1.30×10^{-1}
ξ (m)	7.18×10^{-1}

表2 計算された固有円振動数 ω_n (rad/sec)

振動様式	次数	近似解				厳密解
		N=4	N=8	N=14	N=20	
縦振動	L1	412.7 <2.73>	404.9 <0.78>	403.1 <0.34>	402.7 <0.23>	401.8
	V1	22.32 <0.14>	22.31 <0.12>	22.31 <0.11>	22.31 <0.11>	22.29
鉛直振動	V2	89.59 <0.51>	89.26 <0.14>	89.24 <0.12>	89.24 <0.11>	89.14
	V3	204.5 <1.94>	201.1 <0.24>	200.8 <0.12>	200.8 <0.11>	200.6
水平振動	H1	75.24 <0.16>	75.22 <0.14>	75.22 <0.14>	75.22 <0.14>	75.12
	H2	302.1 <0.53>	301.0 <0.16>	300.9 <0.14>	300.9 <0.14>	300.5
	H3	689.3 <1.97>	677.8 <0.26>	677.1 <0.15>	677.0 <0.14>	676.1
ねじり振動	T1	21.21 <0.49>	21.21 <0.47>	21.21 <0.47>	21.21 <0.47>	21.11
	T2	85.13 <0.86>	84.82 <0.49>	84.80 <0.47>	84.80 <0.47>	84.40
	T3	194.3 <2.30>	191.0 <0.60>	190.8 <0.48>	190.8 <0.47>	189.9

N は要素分割数

<>内は近似解の厳密解に対する誤差 (%)

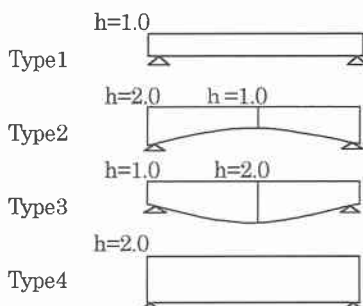


図4 ウェブ高さの変化 (m)

小さくなるものの、支間中央付近の振動が固有振動数に大きな影響を及ぼすものと考えられる。

振動の連成状態の比較はモード連成比を用いて行う。ここで示すモード連成比とは、連成状態を判定するために1節点7自由度を有する固有振動モードの中でそれぞれの変位が全体に占める割合を数値的に表したものである。例えば、i次モードのx軸方向変位のモード連成比は式(12)のように表される。

$$\phi x_i = \frac{\sum_{j=1}^{nodi} \sqrt{u_{ij}^2}}{\sum_{j=1}^{nodi} (\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\theta x_{ij}^2} + \sqrt{\theta y_{ij}^2} + \sqrt{\theta z_{ij}^2} + \sqrt{\theta w_{ij}^2})} \times 100 (\%) \quad \cdots (12)$$

ここでu, v, wはx, y, z方向変位、 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ はx, y, z軸回りの回転角、 θ_w はねじり率、nodiは節点数である。式(12)を用いて等断面桁(タイプ2)および変断面桁(タイプ4)について連成比を計算した結果を表4および表5に示す。表4と表5を比較すると、等断面桁においては、ねじり振動は水平振動成分を伴うが水平振動はねじり振動成分を伴わない。しかし、変断面桁においては、ねじり振動は水平振動成分を伴い水平振動もねじり振動成分を伴うことが確認できる。これは図心とせん断中心の位置が徐々に変化することによるものと考えられる。また等断面桁および変断面桁ともに高次モードになるにつれて複雑な連成状態を示していることがわかる。

5. あとがき

本研究は1軸対称断面であるπ形断面を有する等断面桁と変断面桁における、水平曲げ振動とねじり振動の連成する固有振動性状について検討した。整合質量法により求められた近似解は、微分方程式より求められた厳密解に対して比較的精度が良く、かつ厳密解に対して上界値を与えるということが確認された。しかし、π形断面のように水平振動との連成を伴うねじり振動の解は、収束性および精度もやや悪いことがわかった。またπ形断面を有する変断面桁においては、ねじり振動が水平振動成分を伴い、かつ、水平振動もねじり振動成分を伴うことが確認された。

<参考文献>

- 1) Friberg, P.O.: Coupled Vibrations of Beams—an Exact Dynamic Element Stiffness Matrix, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 479–493, 1983.
- 2) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一: 薄肉変断面桁の三重連成振動解析について、鋼構造年次論文報告集、第5巻、pp. 309–312、1997.
- 3) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一: そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動数の精度について、土木学会第51回年次学術講演会概要集、第1部(B)、pp. 140–141、1996.
- 4) Hayasikawa, T. and Watanabe, N.: Free Vibration Analysis of Continuous Beams, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 5, pp. 639–652, 1985.

表3 固有円振動数の比較 (rad/sec)

振動様式	次数	Type1	Type2	Type3	Type4
鉛直振動	V1	10.81	11.98	20.43	22.31
	V2	43.26	<1.11> 54.16	<1.89> 74.08	<2.06> 89.24
	V3	97.33	<1.25> 125.1	<1.71> 164.2	<2.06> 200.8
水平振動	H1	75.93	76.04	75.33	75.22
	H2	303.7	<1.00> 303.3	<0.99> 303.5	<0.99> 300.9
ねじり振動	T1	9.056	10.18	19.12	21.21
	T2	36.14	<1.12> 47.35	<2.11> 68.65	<2.34> 84.80
	T3	81.28	<1.31> 110.4	<1.90> 152.4	<2.35> 190.8

<>内はType1における解との比

表4 振動の連成比 (%) (Type2)

Mode	φx	φy	φz	φθx	φθy	φθz	φθw	TOTAL
1 T1	0.0	7.6	0.0	83.8	0.0	1.9	6.7	100.0
2 V1	0.1	0.0	92.6	0.0	7.3	0.0	0.0	100.0
3 T2	0.0	19.5	0.0	65.9	0.0	4.0	10.6	100.0
4 V2	0.3	0.0	86.1	0.0	13.6	0.0	0.0	100.0
5 H1	0.0	88.6	0.0	3.7	0.0	7.2	0.5	100.0
6 T3	0.0	20.6	0.0	59.7	0.0	5.2	14.5	100.0
7 V3	0.2	0.0	80.6	0.0	19.2	0.0	0.0	100.0
8 T4	0.0	21.8	0.0	53.8	0.0	6.9	17.5	100.0
9 V4	0.5	0.0	75.4	0.0	24.1	0.0	0.0	100.0
10 H2	0.0	83.6	0.0	2.2	0.0	13.4	0.8	100.0

表5 振動の連成比 (%) (Type4)

Mode	φx	φy	φz	φθx	φθy	φθz	φθw	TOTAL
1 T1	0.0	38.7	0.0	53.9	0.0	3.1	4.3	100.0
2 V1	0.0	0.0	92.7	0.0	7.3	0.0	0.0	100.0
3 H1	0.0	92.6	0.0	0.0	0.0	7.4	0.0	100.0
4 T2	0.0	36.0	0.0	50.1	0.0	5.8	8.1	100.0
5 V2	0.0	0.0	86.4	0.0	13.6	0.0	0.0	100.0
6 T3	0.0	33.7	0.0	46.9	0.0	8.1	11.3	100.0
7 V3	0.0	0.0	80.9	0.0	19.1	0.0	0.0	100.0
8 H2	0.0	86.1	0.0	0.0	0.0	13.9	0.0	100.0
9 T4	0.5	31.6	0.0	44.0	0.0	10.2	14.2	100.0
10 V4	0.0	0.0	76.1	0.0	23.9	0.0	0.0	100.0