

I-15

重錘落下による四辺単純支持矩形床版の動的挙動

専修大学北海道短期大学 正員 三上敬司 室蘭工業大学 正員 松岡健一
室蘭工業大学 正員 岸 徳光 北海道大学 フェロー 能町純雄

1. まえがき

平版の衝撃応答解析で扱う板理論には、古典板理論である薄板理論や薄板理論に板の回転慣性とせん断変形を考慮して修正した Mindlin 板理論などがある¹⁾。古典板理論による衝撃応答解析に関する研究は、大沼が無限平版へ平底の剛体を落下させた場合の解析を、岩崎らが弾性床土上の無限平版へ球底の弾性体を自由落下させた場合について板の局部変形を考慮に入れて解析し、衝撃力、たわみおよび曲げ応力などを求めている^{2),3)}。一方、Mindlin 板理論における矩形床版の衝撃応答解析に関して、Reismann は固有関数展開法によって矩形床版の衝撃応答解析を行ない古典板理論との相違について検討している⁴⁾。また、芳村らはロックシェッドに作用する落石の衝撃力を評価するために、四辺単純支持された矩形床版を両理論を用いてモード解析を行い、それらの動的挙動に関して比較検討している⁵⁾。文献 4), 5) のように仮定した衝撃荷重を用いた床版の動的挙動に関する研究が一般的には多く検討されているが、重錘落下による床版の動的挙動に関する文献は 2), 3) ぐらいであり、この種の研究成果に関してはあまり多く見当たらないようである。

以上のことを踏まえて、本論文では平底重錘落下による四辺単純支持矩形床版の弾性衝撃挙動を検討するために、Mindlin 板理論によるモード解析を行ない Hertz の局部変形を考慮に入れた衝撃力、 x 方向せん断力および支点反力を求めることとする。また、本論文では Mindlin 板理論と同様に理論解析した古典板理論と比較しながら検討する。

2. 理論解析

図-1 に示したように、質量 M 、半径 r_a の平底剛体が四辺単純支持された矩形床版の中央点に落下した場合の衝撃挙動について Mindlin 板理論を用いて理論解析する。境界条件は、 x 方向の辺長を a 、 y 方向の辺長を b にとって、せん断弾性係数 G 、平均せん断係数 κ^2 、鉛直たわみ w 、 x 方向の回転角 ψ_x 、 y 方向の回転角 ψ_y とした場合の運動方程式は次式となる。

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - \kappa^2 G d \left[\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] - \kappa^2 G d \left[\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{\rho d^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\kappa^2 G d (\nabla^2 w + \psi) + q(x, y, z) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{ここで, } \psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{である。}) \quad (3)$$

境界条件は四辺単純支持とすると、次式のように仮定する。

$$\begin{cases} x=0 \text{ で, } M_x(0, y, t) = w(0, y, t) = \psi_y(0, y, t) = 0, & x=a \text{ で, } M_x(a, y, t) = w(a, y, t) = \psi_y(a, y, t) = 0 \\ y=0 \text{ で, } M_y(x, 0, t) = w(x, 0, t) = \psi_x(x, 0, t) = 0, & y=b \text{ で, } M_y(x, b, t) = w(x, b, t) = \psi_x(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{初期条件は時間 } t=0 \text{ で } w(x, y, 0) = \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad \psi_x(x, y, 0) = \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad \psi_y(x, y, 0) = \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0$$

2.1 矩形床版の自由振動

4) 式の境界条件を満足するように解を次式のように仮定する。

Dynamic Behavior of Simply Supported Rectangular Plate under Impact Loading

by Takashi MIKAMI, Ken-ichi G. MATSUOKA, Norimitu KISHI and Sumio G. NOMACHI

$$w(x, y, t) = A_{jmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\psi_x(x, y, t) = B_{jmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$\psi_y(x, y, t) = C_{jmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (7)$$

5) ~ 7) 式を 1) ~ 3) 式に代入し、荷重項 $q(x, y, t) = 0$ とおいて固有振動方程式を求め、固有振動数 ω_{jmn} はこの方程式を解いて m, n に対して 3 個ずつ求まる。

2.2 矩形板の強制振動

たわみ, x, y の回転角の解は、基準座標 $Q_{jmn}(t)$ を用いて表すと

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{jmn} Q_{jmn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{jmn} Q_{jmn}(t) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{jmn} Q_{jmn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

8) ~ 10) 式を 1) ~ 3) 式に代入し、自由振動式を用いて整理すると次式のように基準関数 $Q_{jmn}(t)$ に関する微分方程式が求まる。

$$\ddot{Q}_{jmn}(t) + \omega_{jmn}^2 Q_{jmn}(t) = \frac{1}{\rho d N_{jmn}^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \phi_w(x, y) dx dy \quad (11)$$

上式の部分分布荷重 $q(x, y, t)$ は、矩形床版上の重錘の落下点位置を (ξ_0, η_0) として、ディラックのデルタ関数を用いた集中荷重 $P(t)\delta(x-\xi_0)\delta(y-\eta_0)$ に置き換えその式を時間に関してラプラス変換し、さらにラプラス逆変換して基準関数 $Q_{jmn}(t)$ を求めると次式のようになる。

$$Q_{jmn}(t) = \frac{1}{\rho d N_{jmn}^2} \left[\frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0) \phi_w(x, y)}{\omega_{jmn}} \int_0^t q(\tau) \sin \omega_{jmn}(t-\tau) d\tau \right] \quad (12)$$

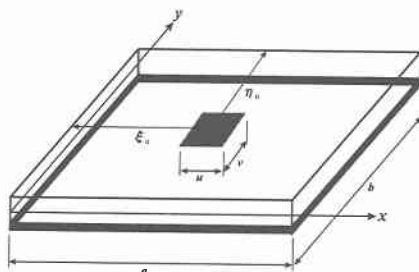
ここで、 $\phi_w(\xi_0, \eta_0) = \sin \frac{m\pi \xi_0}{a} \sin \frac{n\pi \eta_0}{b}$ 、 $B'_{jmn} = B_{jmn}/A_{jmn}$ 、 $C'_{jmn} = C_{jmn}/A_{jmn}$ とおいて $A_{jmn} = 1$ とし正規化すると、各振動モード形は $\phi_w(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 、 $\phi_{\psi_x}(x, y) = B'_{jmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 、 $\phi_{\psi_y}(x, y) = C'_{jmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$ となる。従って、正規関数は $N_{jmn}^2 = \frac{ab}{4} \left\{ 1 + \frac{d^2}{12} (B'^2_{jmn} + C'^2_{jmn}) \right\}$ となる。

次に、質量 M を持つ平底剛体が矩形床版の中央点に落下した場合、矩形床版の局部変形を δ_0 および中立軸の中心たわみ w_0 とすると、剛体の運動方程式は次式となる。

$$M \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} + M \frac{d^2 w_0}{dt^2} + P(t) = 0 \quad (13)$$

平底剛体における Hertz の弾性接触論による矩形床版の局部変形 δ_0 と衝撃力 $P(t)$ の関係は、次式のように表わすことができる²⁾。

$$\delta_0 = \frac{1-\nu^2}{2E\tau_a} P(t) = KP(t) \quad (\text{ただし、} K = \frac{1-\nu^2}{2E\tau_a}, E: \text{床版の弾性係数}, \nu: \text{ポアソン比}) \quad (14)$$



図一 平底重錘落下衝撃を受ける
四辺単純支持矩形床版

いま、初期条件 $t=0$ で $V_0=\sqrt{2gH}$ (g : 重力加速度) として、時間に関して Laplace 変換し衝撃力 P に関して整理した式をさらに Laplace 逆変換すると、剛体が矩形床版に落下した場合の Hertz の弾性接触論を考慮に入れた衝撃力は次式に示す積分方程式を解くことによって求められる。

$$KP(t) + \frac{1}{\rho d} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_{jmn}^2 \omega_{jmn}} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_{jmn} (t-\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = V_0 t \quad (15)$$

床版のたわみ、支持部全反力、曲げ歪、せん断力は実際に床版が減衰振動することから、その減衰定数を h , $\omega_{jmn}' = \omega_{jmn} \sqrt{1-h^2}$ とおくと鉛直方向のたわみは次式のように表される。

$$w(x, y, t) = \frac{1}{\rho d} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0) \phi_w(x, y)}{N_{jmn}^2 \omega_{jmn}'} \int_0^t P(\tau) e^{-h\omega_{jmn}'(t-\tau)} \sin \omega_{jmn}' (t-\tau) d\tau \quad (16)$$

x, y 方向の単位幅当たりのねじりモーメント M_{xy}, M_{yz} , x, y 方向の単位幅当たりの反力 V_x, V_y とすれば、支持部全反力 V は次式のように示される。

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^b V_x \Big|_{x=a} dy + 2 \int_0^a V_y \Big|_{y=b} dx - 8M_{xy} \Big|_{x=a, y=b} \\ &= \frac{-4}{\rho d} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b}{n\pi} \left\{ \kappa^2 Gd \left[\frac{m\pi}{a} + B'_{jmn} \right] + \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{n\pi}{b} \right] \left[\frac{m\pi}{a} C'_{jmn} + \frac{n\pi}{b} B'_{jmn} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{m\pi} \left\{ \kappa^2 Gd \left[\frac{n\pi}{b} + C'_{jmn} \right] + \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{m\pi}{a} \right] \left[\frac{m\pi}{a} C'_{jmn} + \frac{n\pi}{b} B'_{jmn} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) D \left[\frac{m\pi}{a} C'_{jmn} + \frac{n\pi}{b} B'_{jmn} \right] \right] \frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0)}{N_{jmn}^2 \omega_{jmn}'} \int_0^t P(\tau) e^{-h\omega_{jmn}'(t-\tau)} \sin \omega_{jmn}' (t-\tau) d\tau \quad (17) \end{aligned}$$

x 方向せん断力 Q_x を求めると、

$$Q_x = \kappa^2 Gd \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m\pi}{a} + B'_{jmn} \right] \frac{\phi_w(\xi_0, \eta_0) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{N_{jmn}^2 \omega_{jmn}'} \int_0^t P(\tau) e^{-h\omega_{jmn}'(t-\tau)} \sin \omega_{jmn}' (t-\tau) d\tau \quad (18)$$

また、16) ~ 18) 式では集中荷重であるために Fourier 級数の収斂が良くないことから、荷重幅 (u, v) とする分布荷重 $q(x, y, t)$ として置き換えることにする。その場合の分布荷重は落下点 (ξ_0, η_0) に作用させると、以下のように示される。

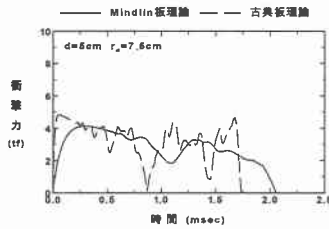
$$q(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{uv} = \frac{P(t)}{uv} \int_{\xi_0-u/2}^{\xi_0+u/2} \int_{\eta_0-v/2}^{\eta_0+v/2} \phi_w(x, y) dx dy = \frac{4abP(t)}{mnuv\pi^2} \phi_w(\xi_0, \eta_0) \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b} \quad (19)$$

3. 数値計算例

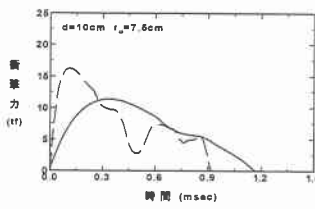
本論文では、主として室蘭工業大学に行われた四辺単純支持 RC 床版の衝撃実験データに基づいてパラメータを設定した⁶⁾。この床版の寸法はスパン $a=b=1.25m$, 板厚 $d=0.1m$ で、物理定数は密度 $\rho=2.5t/m^3$, ポアソン比 $\nu=0.2$, 弾性定数 $E=2.785 \times 10^6 tf/m^3$ であり、重錘は質量 $M=0.07t$, 半径 $r_a=0.075m$ である。また、古典板理論と Mindlin 板理論とを比較するために板厚が $d=5$ および $20cm$ についても検討することにする。なお、衝撃力は集中荷重として求め、支持部全反力およびせん断力は集中荷重とすると収斂が良くないので 19) 式のように部分分布荷重に換算して床版に作用させている。減衰定数は衝撃力で $h=0$, 支持部全反力およびせん断力の場合は $h=0.05$ とした。

3.1 衝撃力の時刻歴応答分布

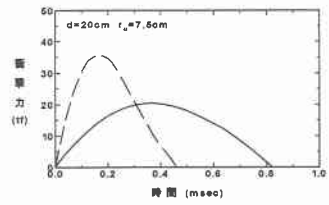
図-2(a) ~ (c) は、初速度 $V=1m/sec$ における重錘が板厚 $d=5, 10, 20cm$ の床版に作用する衝撃力の時刻歴応答分布を示している。実線は Mindlin 板理論値、破線は古典板理論値を示している。なお、15) 式の Fredholm 型積分方程式を数値解析するには文献 3) を参考にして、simpson の $1/3$



(a) $d=5\text{cm}$ の場合

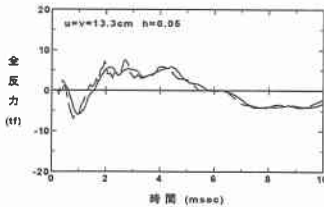


(b) $d=10\text{cm}$ の場合

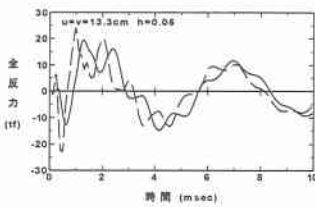


(c) $d=20\text{cm}$ の場合

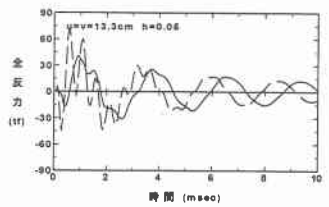
図-2 衝撃力の時刻歴応答分布



(a) $d=5\text{cm}$ の場合



(b) $d=10\text{cm}$ の場合



(c) $d=20\text{cm}$ の場合

図-3 支持部全反力の時刻歴応答分布

および 3/8 積分則により数値的に積分した。その時間刻みは両理論ともに $t=1\times 10^{-1}\mu\text{sec}$ で、Fourier 級数の m および n 項は Mindlin 板理論の場合では各 300 項目程度で、古典板理論の場合では各 100 項目程度でほぼ収斂した。両理論ともに衝撃力が負となった時点で衝撃作用が終了したものと見なし計算を終了した。

(a) 図の Mindlin 板理論の場合は、最大衝撃力 $P_{\max}=4.13\text{tf}$ で最大衝撃力に達する時間 $t_{\max}=0.29\text{msec}$ 、衝撃作用時間 $t_d=2.06\text{msec}$ となっている。また、約 0.8, 1.2msec 近傍における衝撃力波形の乱れは、せん断波速度で伝播した波が境界の支持部で反射し載荷点部に再び戻って来た波によるものと思われる。一方、古典板理論では $P_{\max}=4.81\text{tf}$ で $t_{\max}=0.06\text{msec}$ 、衝撃作用時間 $t_d=1.74\text{msec}$ となっており、この理論の場合も Mindlin 板理論の場合と同様に衝撃力波形の乱れが見られている。これは平面波に酷似したような速度で伝播する反射波の影響によるものと思われる。 $d=10, 20\text{cm}$ の (b), (c) 図の場合では $d=5\text{cm}$ に比較していずれも床版の剛性が大きいことから最大衝撃力が大きく最大衝撃力に達する時間が長くなるが衝撃作用時間は逆に短くなることによるものと思われる。また、反射波の影響による波形の乱れは板厚が厚くなるに従って $d=5\text{cm}$ に比べてその数が少なくなっていることがわかる。これは $d=5\text{cm}$ に比べて衝撃作用時間が短くなるために反射波による影響をそれ程受けていないためと思われる。両理論を比較すると、Mindlin 板理論の場合は古典板理論の場合よりも最大衝撃力が小さく最大衝撃力に達する時間および衝撃作用時間は長くなることからわかる。このことは Mindlin 板理論の場合の方が板の回転慣性とせん断変形を考慮した理論のために古典板理論の場合に比べて柔らかいことによるものと考えられる。

3.2 支持部全反力の時刻歴応答分布

図-3 (a) ~ (c) は初速度 $V=1\text{m/sec}$ で板厚 $d=5, 10, 20\text{cm}$ における支持部全反力の時刻歴応答分布を示している。なお、Fourier 級数の m および n 項は Mindlin 板理論の場合では各 150 項目程度で、古典板理論の場合では各 120 項目程度でほぼ収斂した。(a) 図は両理論ともに衝撃作用時間以内では支持部で負の反力が生じ除荷後は正の反力に移行し、その後は各理論ごとの固有周期で減衰自由振動を示していることがわかる。 $d=10, 20\text{cm}$ の場合では $d=5\text{cm}$ の場合と同様な応答傾向を、また各床版厚に対応した固有周期による自由減衰振動を示している。両理論を比較すると、各

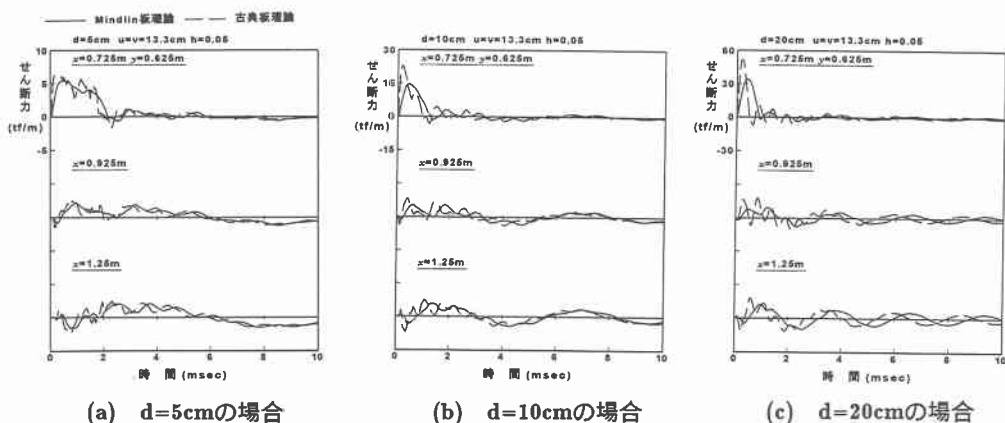


図-4 x 方向せん断力の時刻歴応答分布

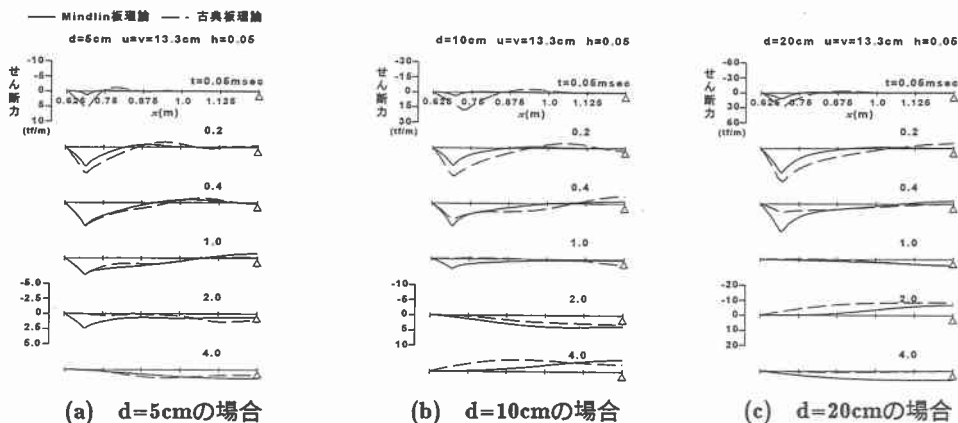


図-5 x 方向のせん断力応答分布

全反力は図-2に示した各衝撃力に対応した応答値を示し、 $d=5\text{cm}$ の場合では両理論における固有振動数がほぼ等しいことから両者はほぼ近似した応答値を示していることがわかる。一方、 $d=10, 20\text{cm}$ の場合では $d=5\text{cm}$ の場合と比較して衝撃力および固有振動数の差が広がることから、全反力の場合も衝撃力の場合と同様に板厚が厚くなると両者の応答差が徐々に広がっていることがわかる。

3.3 x 方向せん断力の時刻歴応答分布

図-4(a)～(c)は初速度 $V=1\text{m/sec}$ で板厚 $d=5, 10, 20\text{cm}$ における x 方向せん断力の時刻歴応答分布を示している。なお、各図は x 方向 $x=0.725, 0.925, 1.25\text{m}$ におけるせん断力応答分布を示している。(a) 図の Mindlin 板理論の場合、載荷点近傍の $x=0.725\text{m}$ では図-2で示した衝撃力に近似した応答波形分布を示している。スパン長の約 $1/4$ 近傍では衝撃初期で僅かな負のせん断力が生じた後正のせん断力へ移行し、その後自由減衰振動を示している。また支持部 ($x=1.25\text{m}$) ではせん断波が到達後に負のせん断力が生じた後に正のせん断力へ移行し、その後自由減衰振動を呈していることがわかる。古典板理論の場合は $x=1.25\text{m}$ の場合では平面波に酷似したような波でスパン方向に伝播するためにせん断波より速く負のせん断力が発生しているものの、 $x=0.725, 0.925, 1.25\text{m}$ における応答差はあまり見られないことがわかる。一方、(b), (c) 図において両理論を比較すると、両者は概ね (a) 図とほぼ同様な傾向を示しているが、 $x=0.725\text{m}$ の場合では各板厚に対応する衝撃力の差がそのまま現われ、 $x=1.25\text{m}$ の場合では各板厚ごとの全反力にほぼ相似した応答分

布を示すことがわかる。このことより、板厚が厚くなれば Mindlin 板理論と古典板理論との固有振動数の差が広がるために、それに対応したせん断力の応答分布差が現われているものと考えられる。

3.4 x 方向のせん断力応答分布

図-5(a)～(c)は初速度 $V=1\text{m/sec}$ で板厚 $d=5, 10, 20\text{cm}$ における x 方向のせん断力応答分布を示している。なお、各図は任意の時間 $t=0.05, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0, 4.0\text{msec}$ におけるせん断力分布を示している。(a) 図の Mindlin 板理論の場合、 $t=0.05\text{msec}$ の場合では極く衝撃初期のためにせん断波が $x=0.75\text{m}$ 近傍までしか伝播されずかつせん断力の応答値も小さいことがわかる。 $t=0.2\text{msec}$ の場合ではせん断波が未だ支持部に伝播されていないが、 $t=0.4\text{msec}$ の場合ではせん断波が床版全体に伝播しており、せん断力の応答値も $x=0.69\text{m}$ 近傍で 7.96tf/m となり最大応答値を示している。さらに支持部では $t=1\text{msec}$ で負となり 2msec で正へ移行しており、 2msec では衝撃力が作用しているために載荷点近傍におけるせん断力は未だ大きな応答値が発生しており、また 4msec では除荷されていることから3次振動モードが卓越した自由減衰振動を示していることがわかる。一方、古典板理論に関して、 $t=0.05\text{msec}$ では $x=0.69\text{m}$ 近傍でせん断力が 5.5tf/m となり、また平面波のような波は未だ支持部に伝播しておらず、 $t=0.2\text{msec}$ で支持部に伝播していることがわかる。 $t=0.4\text{msec}$ では $x=0.8\text{m}$ の近傍で最大せん断力 8.4tf/m となり、 $t=1\text{msec}$ で衝撃力に対応してせん断力の応答値も小さく支持部には負のせん断力が生じている。 $t=2\text{msec}$ 以降では3次振動モードが卓越した自由減衰振動を示していることがわかる。 $d=10, 20\text{cm}$ の場合は $d=5\text{cm}$ の場合と同様な傾向を、各衝撃力に対応した応答分布を示していることがわかる。両理論を比較すると、両理論における伝播速度が異なることと各板厚変化によって固有振動数が異なることによる影響が x 方向せん断力分布にも明らかに現われていることがわかる。

4. あとがき

本論文では、平底重錘が四辺単純支持された矩形床版の中央に落下した場合の床版の衝撃挙動を Hertz の弾性接触理論を考慮に入れた Mindlin 板理論を誘導し、板厚 $d=5, 10\text{cm}, 20\text{cm}$ における衝撃力、支持部全反力、 x 方向せん断力の時刻歴応答および x 方向せん断力応答分布について古典板理論の場合と比較して検討した。得られた解析結果を、要約すると以下ようになる。

- 1) 衝撃力の場合は、板厚が厚くなれば両理論ともに最大衝撃力が大きくかつ最大衝撃力に達する時間が長く逆に衝撃作用時間が短くなる傾向にある。両理論は板厚が厚くなれば徐々にそれらの応答差が広がることがわかった。
- 2) 衝撃力に対する支持部全反力の最大応答倍率は両理論ともに板厚が厚くなると両理論ともに各倍率は徐々に大きくなり、両者の差も広がる傾向にあることがわかった。
- 3) x 方向せん断力の時刻歴応答および x 方向分布は 1) および 2) の場合と同様に板厚に比例して、各理論における衝撃力に対応した応答差が大きくなる傾向にあることがわかった。
- 4) Mindlin 板理論の場合はせん断波速度で、古典板理論では平面波に酷似した速度で床版を伝播していることがわかった。

参考文献

- 1) MINDLIN, R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, ASME, 31~38, 1951. 2) 大沼博志: コンクリート構造物の高温クリープと衝撃応答特性に関する研究, 北海道大学学位論文, 1984. 3) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析, 岩手大学工学部研究報告, Vol.37, pp.127~138, 1984. 4) Reismann, H.: Elastic Plates-Theory and Application, Wiley, 1988. 5) 芳村仁・三上隆・運上茂樹・若林学: ロックシェッドに作用する落石の衝撃力, 土木学会北海道支部論文報告集, pp.103~108, 1985. 6) 岸徳光・松岡健一・大沼博志・能町純雄: 四辺単純支持RC矩形板の重錘落下衝撃実験, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.1587~1596, 1992.3.