

II-47

植物プランクトンの数値シミュレーション

-植物・動物プランクトンの相平面における解軌道-

北見工業大学 学生員 仲沢典之  
北見工業大学 正員 佐渡公明

1. はじめに

近年、湖沼の富栄養化が植物プランクトンの大量発生（アオコ・赤潮）を促し環境問題となっている。道東に位置する網走湖も例外ではなく、夏期にはアオコが発生する。網走湖は上層の淡水層、下層の塩水層（DO=0の無酸素層）という安定した2層構造をもち、この境界面は水深5~6m（最大水深16m）に位置する。湖沼における環境物質を何らかの手法で定量化して、水質変化の予測を試みるために、ここでは決定論的モデルの一種である宗宮モデル<sup>1)</sup>を用いる。特に植物プランクトン（アオコ）の発生量を予測し、植物プランクトンの制御に必要な基本的特性を明らかにするため、宗宮モデルから得られる方程式の相平面の解軌道を用いて、植物・動物プランクトンの相互作用を数値シミュレーションにより検討する。

2. 捕食者-被食者モデル

2種生態系を数学的モデル化したものの中に捕食者-被食者モデルがある。本研究では、動物プランクトン（捕食者）と植物プランクトン（被食者）の変化を宗宮モデルをベースにしてシミュレーションを行った。

2. 1 宗宮モデル<sup>1)</sup>

宗宮モデルは8つの水質方程式（植物プランクトン、動物プランクトン、無機態・有機態窒素、無機態・有機態リン、溶解性・浮遊性COD）からなる生態系モデルである。このうちアオコの増減を示す、植物プランクトンの式を式(1)、動物プランクトンの式を式(4)に示す。

(i) 植物プランクトン P (μgchl.a/l)

$$\frac{dP}{dt} = (G_p - k_2 T - G'_z \cdot \frac{Z}{P} - d) \cdot P + (P_0 \cdot Q_0 - P \cdot Q) \cdot \frac{1}{V} \quad (1)$$

$$G_p = \left\{ p \cdot \mu_0 \cdot \left[ -\frac{T^2}{289} + \frac{T}{8.5} \right] + (1-p) \cdot \mu_c \cdot k_1 \cdot T \right\} \cdot \frac{L}{k_L + L} \cdot \frac{C_{IN}}{k_{IN} + C_{IN}} \cdot \frac{C_{IP}}{k_{IP} + C_{IP}} \quad (2)$$

$$G'_z = C_s \cdot k_{PP} \cdot \frac{P}{k_{PP} + P} \quad (3)$$

(ii) 動物プランクトン Z (mgC/l)

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha \cdot a_s \cdot G'_z - k_3 \cdot T) \cdot Z + (Z_0 \cdot Q_0 - Z \cdot Q) \cdot \frac{1}{V} \quad (4)$$

2. 2 植物プランクトンの沈降速度についての最適値

網走湖の生態系モデルとして宗宮モデルを用いて計算を行う。水質方程式に用いられる定数・係数は、すべて平成6年度網走湖水質保全対策検討委員会の資料<sup>2)</sup>の値を用いた。また水温、日射量、湖体積は、平成3年の日毎のデータを与え8つの微分方程式を365日間数値計算して求めた。

Numerical Simulation of Phytoplankton -The Trajectory of Phytoplankton and Zooplankton in a Phase Plane-  
by Noriyuki NAKAZAWA and Kimiteru SADO

植物プランクトンの沈降速度  $d$  ( $\text{day}^{-1}$ ) に関しては深さ方向によって値が変化している (実測値:  $0.01 \sim 0.38$ )。本研究では網走湖を1ボックス1層モデルとして扱っているため植物プランクトンの沈降速度  $d$  の値を定数とすることにした。そこで植物プランクトンの沈降速度は実測値の範囲 ( $0.01 \sim 0.3$ ) で細かく変化させ、植物・動物プランクトンの値を計算した。それらの計算値と平成3年の植物・動物プランクトンの実測値からそれぞれ平均2乗誤差 (RMS 誤差) を求めた (図-1)。この結果、植物プランクトンの沈降速度は  $0.05$  付近で植物・動物プランクトンが共に小さい誤差をとることがわかった。さらに  $d$  の値を  $0.05$  付近で細かく変化させて計算し、 $d$  の最適値が  $P$  と  $Z$  共に誤差の小さくなる  $0.055$  であることが分かった。以後の計算において  $d$  の値は  $0.055$  とした。

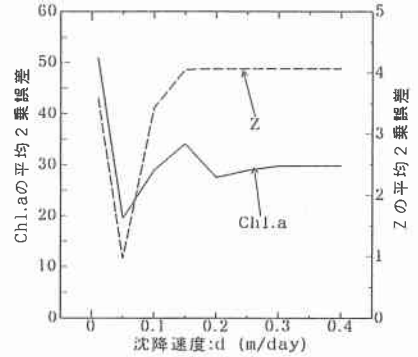


図-1 沈降速度の変化に対する平均2乗誤差

### 2.3 動物プランクトンの捕食に関する3分類

植物プランクトンの式 (1) の捕食速度の項  $G_z \cdot Z$  は、

(a)  $P \ll k_{PP}$  ( $P$  が非常に少なく、 $Z$  の飽食効果が無視できる場合)、

(c)  $P \gg k_{PP}$  ( $P$  が非常に多く、 $Z$  は飽食状態の場合)、

(b)  $P$  が全範囲 ( $P$  が飽食効果の場合)、  
以上の3つの場合 (図-2) に分類し以下のように式を展開できる。

この利点は難しい非線形の式を線形化及び定数化することで解析しやすくなることである。

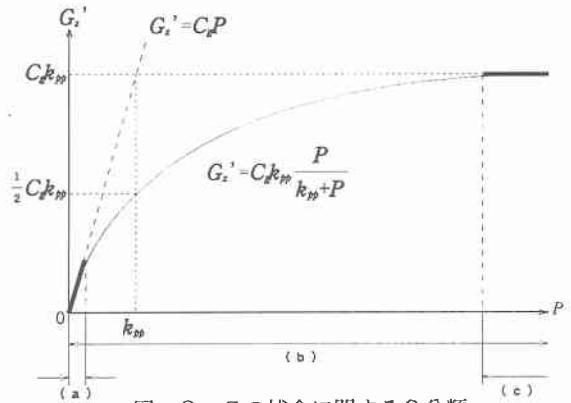


図-2 Zの捕食に関する3分類

(a)  $P \ll k_{PP}$  の場合 (少捕食 …… 相平面における解軌道は閉曲線)

式 (3) において  $\lim_{k_{PP} \rightarrow \infty} \frac{k_{PP} \cdot P}{k_{PP} + P} = P$  より  $G_z' = C_g \cdot P$  となる。

よって植物・動物プランクトンの式は、

$$\frac{dP}{dt} = (G_p - k_2 \cdot T - C_g \cdot Z - d - \frac{Q}{V}) \cdot P + \frac{P_0 \cdot Q_0}{V} \quad (5)$$

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha \cdot a_s \cdot C_g \cdot P - k_3 \cdot T - \frac{Q}{V}) \cdot Z + \frac{Z_0 \cdot Q_0}{V} \quad (6)$$

(b)  $P$  が全範囲の場合 (飽食効果 …… 相平面における解軌道は螺線)

植物・動物プランクトンの式は (1), (4) に同じ

(c)  $P \gg k_{PP}$  の場合 (捕食限界 …… 相平面における解軌道は放物線)

式 (3) において  $\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{k_{PP} \cdot P}{k_{PP} + P} = k_{PP}$  より  $G_z' = C_g \cdot k_{PP}$  となる。

よって植物・動物プランクトンの式は、

$$\frac{dP}{dt} = (G_P - k_2 \cdot T - d - \frac{Q}{V}) \cdot P - C_g \cdot k_{PP} \cdot Z + \frac{P_0 \cdot Q_0}{V} \quad (7)$$

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha \cdot a_s \cdot C_g \cdot k_{PP} - k_3 \cdot T - \frac{Q}{V}) \cdot Z + \frac{Z_0 \cdot Q_0}{V} \quad (8)$$

図-2における(a),(c)の適用範囲については、 $k_{PP}$ と $C_g$ の一定値に対する $G_z'$ の計算結果から(a),(c)の誤差範囲を決定することができる。今回採用する $k_{PP}=60 \mu \text{gchl.a/l}$ 、 $C_g=0.2 \text{ l/mgC}\cdot\text{day}$ の場合は、(b)に対する相対誤差を10%までとすると(a)は $P \leq 6.0 \mu \text{gchl.a/l}$ 、(c)は $P \geq 540$ となる。また(b)に対する相対誤差を5%までとすると(a)は $P \leq 3.0$ 、(c)は $P \geq 1140$ となる。

### 3. 植物・動物プランクトン相平面

植物・動物プランクトンの式(1),(4)を式(9)のように表し、時間を消去すると式(10)の相平面方程式が得られる。この2種のプランクトンの相互作用を調べるため相平面方程式を用いて計算した。

$$\frac{dP}{dt} = f(P, Z), \quad \frac{dZ}{dt} = g(P, Z) \quad (9)$$

$$\frac{dP}{dZ} = \frac{f(P, Z)}{g(P, Z)} \quad (10)$$

#### 3.1 少捕食、飽食効果、捕食限界に対する解軌道

式(5)~(8)がそれぞれの範囲でどこまで近似できているのか、相平面グラフにより検討する。

図-3は植物プランクトンの初期値 $P_0=6.0 \mu \text{gchl.a/l}$ 、動物プランクトンの初期値 $Z_0=0.2 \text{ mgC/l}$ で閉曲線と螺線とをそれぞれ計算した結果を一緒に表したものである。この $P_0=6.0 \mu \text{gchl.a/l}$ は2, 3で求めたように厳密解である螺線に対し相対誤差10%以内の値である。螺線の解軌道は初期値から次第に時計回りに発散する特徴を持つが初期の軌道は閉曲線とほぼ一致している。

図-4は初期値が $P_0=600 \mu \text{gchl.a/l}$ 、 $Z_0=60 \text{ mgC/l}$ で計算した放物線と螺線の比較である。この $P_0$ は2, 3で求めた $P \geq 540$ より捕食限界に属している。図を見ると解軌道が初期値の近くでほとんど一致していることが分かる。下の部分( $P$ が0付近)で放物線と螺線とでは解軌道が異なるがこれは飽食効果によるものである。原点付近に到ると(a)の $P \ll k_{PP}$ 領域となるため閉曲線となる。

#### 3.2 水温、栄養塩類、日射量の影響

これまでの水温、日射量等の各種パラメータを一定とした相平面における解軌道では $P$ 、 $Z$ の初期値が大きく影響している。各パラメータをさまざまに変えて計算した結果を以下に示す。

図-5, 6は、 $P_0=17 \mu \text{gchl.a/l}$ 、 $Z_0=0.2 \text{ mgC/l}$ 、日射量 $L=400 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{day}$ 、無機態窒素 $IN=40 \mu \text{ g/l}$ 、無機態リン $IP=4 \mu \text{ g/l}$ とし、水温=15, 20, 25, 30°Cの4通りについて、少捕食・飽食効果それぞれの場合の計算結果である。水温が上昇しても、必ずしも植物プランクトンの増加にはつながらないことが分かる。これ

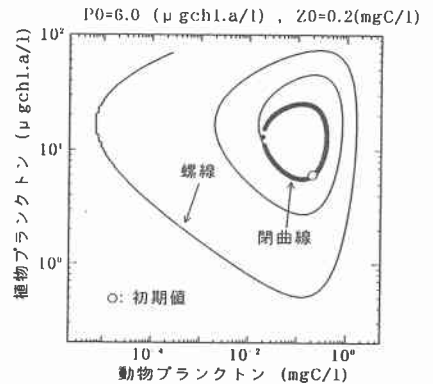


図-3 閉曲線と螺線

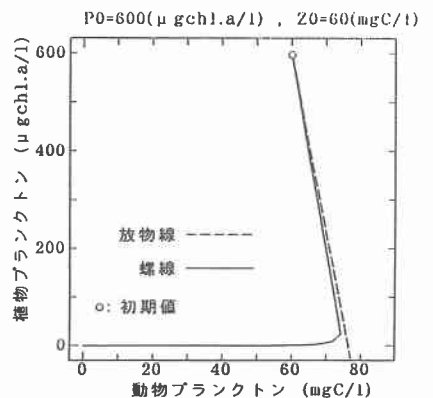


図-4 放物線と螺線

は植物プランクトンの適温が影響しているからである。

図-7は、 $P_0=17 \mu \text{gchl.a/l}$ 、 $Z_0=0.2 \text{mgC/l}$ 、 $L=400 \text{cal/cm}^2 \cdot \text{day}$ 、 $IP=4 \mu \text{g/l}$ 、水温 $=15^\circ\text{C}$ とし、 $IN=100, 600, 1200 \mu \text{g/l}$ の3通りについて飽食効果の場合を示している。 $IN$ が増加すると解軌道は大きくなっていることが分かる。 $IP$ 変化の場合も $IN$ 同様の結果を得た。

図-8は、 $P_0=17 \mu \text{gchl.a/l}$ 、 $Z_0=0.2 \text{mgC/l}$ 、 $IN=40 \mu \text{g/l}$ 、 $IP=4 \mu \text{g/l}$ 、水温 $=15^\circ\text{C}$ とし、日射量 $L=400, 800, 1000 \text{cal/cm}^2 \cdot \text{day}$ の3通りについて飽食効果の場合を示している。日射量の増加に対応して螺線が大きくなっていることが分かる。

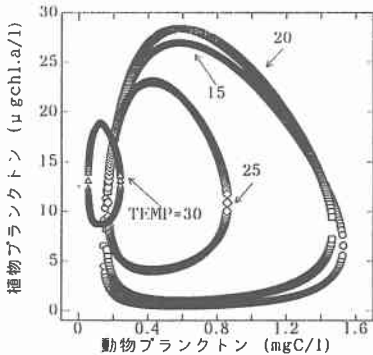


図-5 水温変化による閉曲線

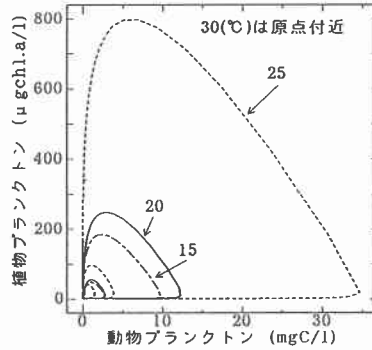


図-6 水温変化による螺線

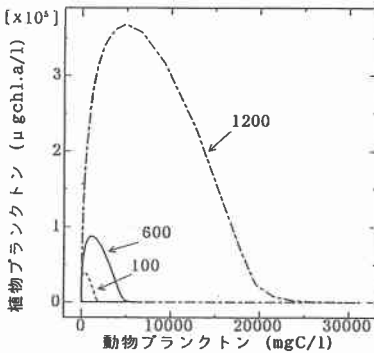


図-7 IN変化による螺線

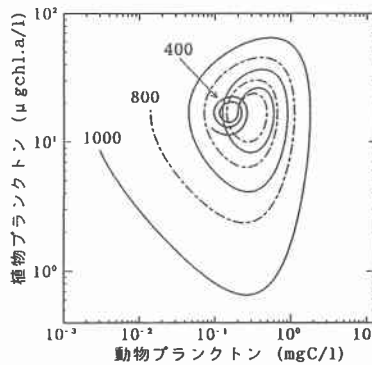


図-8 日射量変化による螺線

#### 4. 結論

1) 網走湖の1ボックス1層モデルにおいて、植物プランクトンの沈降速度 $d$ の最適値が $0.055 \text{ day}^{-1}$ と得られた。

2) 植物・動物プランクトンの相平面における解軌道において、水温の値を上げて解軌道が大きくなるとは限らないが、 $IN$ 、 $IP$ 、日射量の値を上げると、それに対応して解軌道が大きくなることが分かった。

#### 参考文献

- 1) 宗宮功: 湖沼の物質循環モデル, 国立公害研究所調査報告, 第18号, pp.114~151, 1981.
- 2) 北海道開発局網走開発建設部: 網走湖水質保全対策検討委員会資料(平成3, 6年度版)。
- 3) R. Haberman: 生態系の微分方程式, 現代数学社, pp.68~136.