

II-42 不均質場の透水量係数の推定について

室蘭工業大学 学生員 大坂忠史
 室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1 はじめに

近年、地下水流動に関する知識が飛躍的に増加し、これに伴い地下水利用計画、水質保全計画の策定に地下水解析モデルが多用されている。しかし、モデル手法の進歩にも拘わらず、現実の問題への適用には問題点が残されており、いまだ広範な有効利用の段階には至っていない。この原因は、モデルの構造および精度と整合性のある観測データを収集することが困難であることに起因する。また、広域地下水の挙動を面的に観測することが難しく、数量的に限られた地点の観測情報から経験的に推定するため、空間的に変動する透水係数、透水量係数等の定量化には大きな誤差が混在する。このような実状下で地下水流動解析に整合するデータを得るには、地点観測データから非観測地点の水位、透水量係数等を合理的に推定できる手法の開発が必要である。本研究では、利用可能な観測値および事前情報が少ない地下水流動を解析対象とし、誤差処理にカルマンフィルタ理論、非観測地点の地下水位の推定にバリオグラムを適用して、帯水層パラメータの空間分布を推定する手法を提案するものである。

2 解析対象地域

解析対象地域は図-1に示す北海道中央部の旭川市街を貫流する石狩川水系牛朱別川の最下流部左岸に位置する東西1.5km、南北0.46kmの不圧帯水層である。この地域の地質は第四世紀沖積世の氾濫源で構成されており、その主体は砂礫層で地表面下1m以深に分布し、牛朱別川からの浸出水により十分の地下水涵養がなされている。地下水位はこの地域に不規則に配置された16個所の井戸で、1984年3月から1985年3月までの約1年間に互り一日一回定時観測を行った。本研究では1985年1月1日から3月1日までの冬期間の地下水観測値を用いて、図-2に示すフローチャートに従って透水量係数の空間分布を求める。

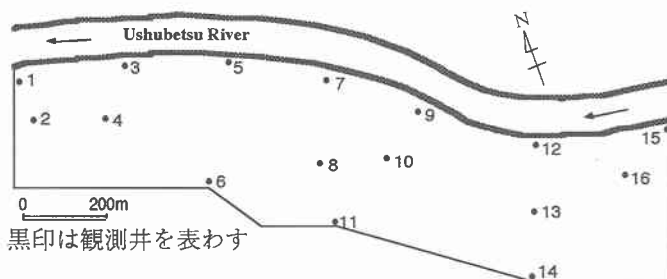


図-1 解析領域概要図

3 非観測地点の地下水位の推定

3.1 観測地下水位の誤差処理

地下水観測値から帯水層パラメータを求める逆問題において、観測値に誤差が含まれていると、同定すべきパラメータは最適値に収束せず、ときには物理的に許容できない値を得る場合がある。従って、本研究ではカルマン・フィルタ理論の固定区間スムージングを適用して

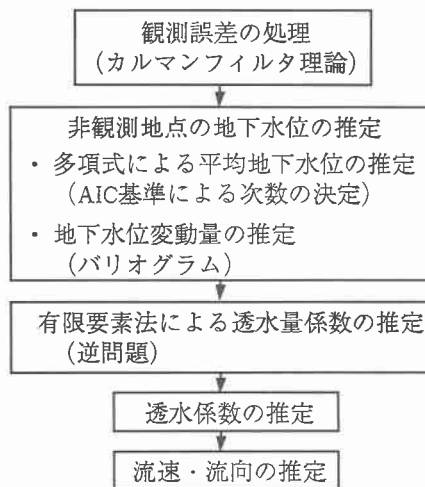


図-2 帯水層係数の推定フローチャート

Study on The Estimation of The Transmissivity in Heterogeneous Aquifer.
 by Tadashi OSAKA, Satoshi TOHMA.

誤差を分離し、観測地下水の平滑推定値を求め、以後の解析において観測値として用いることにした。

3.2 平均地下水位の推定

地下水位を観測値に基づき観測期間における平均 m と変動成分 z との和で表されるものとし次式で表わす。

$$h(x, y, t) = m(x, y) + z(x, y, t) \quad (1)$$

平均値 $m(x, y)$ は観測地点ごとに異なるため、領域内では空間的トレンドを有する。この空間トレンドは次式で示される座標値 x, y の多項式で表すことにする。

$$m(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + a_k^*y \quad (2)$$

ここで、 x, y は位置座標、 k はトレンド項数、 n は多項式の次数である。

多項式の次数については必要以上に大きくなると、真の構造ではなく、誤差を忠実に再現するだけになってしまうため、AIC(赤池の情報量基準)²⁾を用いて最適次数を決定する。AICは次式で定義される。

$$AIC = -2 \log(\text{最大尤度}) + 2(\text{パラメータ数}) \quad (3)$$

解析領域内の平均地下水位の観測値 F はある未知関数 $f(x, y)$ に観測誤差 ε が加わったものと仮定する。

$$F_i = f(x_i, y_i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

ここに、 N は観測地点を表す。

この観測値を(2)式で近似する場合、次式で示す残差二乗和が最小となるパラメータ a_k を決定すると最小二乗近似となる。

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N \{m(x_i, y_i) - F_i\}^2 \quad (5)$$

最小二乗近似の場合、残差は平均値が0で分散が σ^2 の正規分布に従うと仮定すると、(3)式の右辺第1項は次式となる。

$$-2 \log(\text{最大尤度}) = N \log Q + N \log(2\pi e / N) \quad (6)$$

ここで、(3)式のパラメータは $m(x, y)$ のパラメータ数 $(n+1)(n+2)/2$ であり、(3)式にそれぞれ代入するとAICは次式となり、決定した多項式を用いて、任意地点の地下水位の空間トレンドを推定する。

$$AIC = N \log Q + (n+1)(n+2) + N \log(2\pi e / N) \quad (7)$$

3.3 地下水位変動量の推定

地下水位の変動成分を確率場における実現値と考え、観測値に基づき統計的手法³⁾を用いて非観測地点の地下水位の変動成分を推定する。統計的手法を適用する場合、一般に状態変数の統計的性質のうち平均値、分散を一定とする弱定常過程に従う現象であれば、エルゴード性を仮定して推定することが可能である。しかし、自然状態においては地下水の分散は解析対象領域が広範囲になるに伴い大きくなく傾向を示し、この弱定常過程は厳密には成立しないことになる。本解析では地下水位の変動成分の分散を一定とする代わりに、弱定常過程の成立条件を緩和するとともに変動成分の統計的空間分布をより正確に表現できると考えられるバリオグラムを導入する。バリオグラムは、二点間の状態変数の差の分散を定義するもので、距離 d はなれた二点の地下水位の差の分散が移動に際し不変とするものであり次式によって与えられる。

$$\gamma(d) = \frac{1}{2N(d)} \sum_{i=1}^{N(d)} [h(X_i + d) - h(X_i)]^2 \quad (8)$$

ここで、 $\gamma(d)$ はバリオグラム、 $h(X_i)$ は観測地点 i における地下水位、 d は二点間の距離、 N は観測点総数を示す。任意の非観測地点における地下水位は次式で示される線形回帰式により推定を行う。

$$h^*(X_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i h(X_i) \quad (9)$$

ここで、 h^* は非観測地点 X_0 における地下水位推定値、 h は観測地点 X_i における地下水位観測値、 λ_0^i は $h(X_i)$ の重み係数である。(9)式が最良不偏推定式となるために、推定誤差の平均が零の不偏性を有すること、推定誤差の共分散が最小となることの2つの条件を満足しなければならない。そこで、(9)式の重み係数 λ_0^i を推定誤差の不偏性と分散の最小化により同定する。推定誤差平均の不偏性から次の関係が得られる。

$$E[h_0^*] = E[h_0] = m \quad (10)$$

ここで、 m は一定値を示す。上式に(9)式を代入すると重み係数 λ_0^i に関して次式を得る。

$$\sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1 \quad (11)$$

この拘束条件のもとで推定誤差の分散を最小にする重み係数を求めるため、Lagurangeの乗数法を用いる。この場合、最適探索の評価基準には次式を採用する。

$$\frac{1}{2}E[(h_0^* - h_0)^2] - \mu \left[\sum_{i=1}^N \lambda_0^i - 1 \right] \rightarrow \text{Minimum} \quad (12)$$

ここで、 μ はLagurangeの乗数を示す。

(12)式の右辺第一項に(9)式を代入すると以下のように変形できる。

$$E[(h_0^* - h_0)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N \lambda_0^i h_i - h_0\right)^2\right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_0^i \lambda_0^j E[(h_i - h_0)(h_j - h_0)] \quad (13)$$

上式に(8)式を代入すると次式を得る。

$$E[(h_0^* - h_0)^2] = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_0^i \lambda_0^j \gamma(X_i - X_j) + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \gamma(X_i - X_0) \quad (14)$$

(8)式を(12)式に代入し、最小化を行うと次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^N \lambda_0^i \gamma(X_i - X_j) + \mu = \gamma(X_i - X_0), \quad \sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

この方程式(15)式を解くことにより、最良近似式の係数 λ_0^i が決定される。一方、この最良近似式による推定誤差の分散は、正規方程式の解を(14)式に代入し下式で与えられる。

$$\text{Var}[(h_0^* - h_0)] = \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \gamma(X_i - X_0) + \mu \quad (16)$$

以上の方法で定式化した最良近似式が正しく任意地点の地下水位を推定するには、推定値に偏りがなく誤差の分散が最小でなくてはならない。これを検証するには、各観測地点の地下水位を、当該点を除き他の観測地点の値を用いて推定する。この最良近似式が適切に選定されているならば、誤差の平均は0となり、観測値との分散と(16)式の分散の対比は1となる。

$$E[(h_i^* - h_i)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [h_i^*(X_i) - h_i(X_i)] = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{h_i^*(X_i) - h_i(X_i)}{\sigma} \right\}^2 = 1 \quad (18) \quad \sigma^2 = \text{Var}[(h_0^* - h_0)] \quad (19)$$

ここで、 RV は相対分散比、 N は観測点総数を示す。上記の二条件が(9)式の妥当性を判定する。以上により(2)式による平均地下水位と(9)式による変動成分との和で地下水位を推定する。

4 透水量係数の空間分布の推定

前節で得られた地下水位から透水量係数の空間分布を推定する。本解析では次式で示される平面二次元定常地下水流動方程式に関して非線形最小二乗による最適化手法を用いて推定する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (20)$$

ここで、 h は地下水位、 T は透水量係数、 Q は涵養量または揚水量、 x, y は平面座標を示す。観測地点における透水量係数の最適値は観測地下水位に対するモデルによる計算地下水位の残差平方和を最小にするものと考え、最適解を探索するための評価基準⁹⁾として次式を採用する。

$$I(T) = \sum_{i=1}^N W_i [h_i - \bar{h}_i(T)]^2 \quad (21)$$

式中の I は評価基準、 h_i は観測地下水位、 $\bar{h}_i(T)$ は計算地下水位、 W_i は重みで、ここでは $W_i = 1$ とする。
(21)式を透水量係数 T に関して最小化を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial I(T)}{\partial T_m} = \sum_{i=1}^N J_{T_i}^T \{h_i - \bar{h}_i(T)\}^2 = 0 \quad m = 1, \dots, M \quad (22)$$

$$J_T^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial T_1} & \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial T_M} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \bar{h}_N}{\partial T_1} & \frac{\partial \bar{h}_N}{\partial T_2} & \dots & \frac{\partial \bar{h}_N}{\partial T_M} \end{bmatrix}$$

ここで、 J_T^T はヤコビアン行列と呼称される地下水位 h の透水量係数 T に関する偏微分係数で、その要素は次式で定義される。また上付添字 T は転置を示す。

ここで、 N は観測総数、 M は同定すべき透水量係数の総数に対応する。

地下水位は透水量係数の関数形であるため、(22)式は非線形となり、直接解を求めることができない。そこで、

テイラー展開を行い、一次の項のみを考慮した線形近似式を考え、次式で示す反復改良法により残差平方和を最小にする透水量係数を求めることにする。

$$\bar{h}_i(T + \Delta T) = \bar{h}_i(T) + J_{T_i}^T \Delta T \quad (24)$$

上式を(22)式に代入すると、透水量係数の反復修正量 ΔT は次のようにして求められる。

$$\Delta T = (J_T^T J_T)^{-1} J_T^T \{h_i - \bar{h}_i(T)\} \quad (25)$$

(25)式から各反復時において得られる透水量係数は次のようにして表される。

$$T(k+1) = T(k) + (J_T^T J_T)^{-1} J_T^T \{h_i - \bar{h}_i(T)\} \quad (26)$$

但し、 k は反復回数を示す。上記の同定過程において、透水量係数 T が修正されるごとに評価基準 I の計算⁹⁾を行い、それが極小値となるときの T を最適同定値とした。

5 解析結果及び考察

5.1 非観測地点の地下水位の推定

解析領域を図-3のように70節点、52個の小矩形領域に分割し、各節点の地下水位を観測地下水位を用いて推定する。この領域における地下水位の平面的トレンドを(2)式の回帰式で推定する。観測値の平均は60日間のカルマンフィルタによる固定スムージングにより誤差処理を行った地下水位平滑推定値を用いて算出し、トレンド回帰式に1次から5次多項式を順次適用してAIC



図-3 分割解析領域

により最適次数を決定した。その結果を図-4に示す。残差平方和は次数が大きくなるにつれ減少の傾向を示しているが、AICは3次の時が最小で、それ以上になると急激に増加しているため、3次多項式をトレンドの回帰式として用いることにする。次にある時刻の変動量を各観測点のトレンドを除き、バリオグラムで求める。観測点間の距離を90m刻みで階級分けを行い地下水位の差の分散を計算した。刻み90mは各階級に入る度数がほぼ等しくなるように試行錯誤的に決定した。得られた地下水位のバリオグラムを図-5に示す。縦軸はバリオグラム、横軸は観測点間距離を表わす。バリオグラムは距離が580mまでほぼ線形を有していることが認められる。従って(9)式で非観測地点の地下水位変動量を推定する場合、すべての観測点の値を用いる必要がなく、推定地点を中心とする半径290mの円内にある観測点のみを考慮するとよいことになる。この方法を使用することにより、観測点間の不確実性に基づく推定精度の低下が避けられ、同時に(16)式中の係数を減少させ、計算処理が軽減できる長所を有する。同図から回帰式を求めると、地下水位のバリオグラムは次式で与えられる。

$$\gamma(d) = 2.9412 \times 10^{-6} \quad d \leq 580 \text{ m} \quad (27)$$

上式が正しく地点値を推定し得るかを検証するため、各観測点の地下水位を当該点を除いて推定する。

この結果(17)式は0.0034であり、(18)式の相対分散比は0.958となる。従って、この近似式は偏りがなく最小分散値が得られる。以上の方法で妥当性が確かめられた地下水位の最良近似式を用いて、70節点における地下水位の変動量を推定した。3次多項式によるトレンドとバリオグラムによる変動量の両者を加算して70節点の地下水位の推定値とし、内挿補間により解析対象領域の空間分布を推定した結果を図-6に示す。地下水位は東から西に向かって低くなり、この方向に地下水が流動する。

5.2 透水量係数の空間分布の推定

透水量係数の空間分布を有限要素法を用いて推定する際、小矩形領域の透水量係数は $133\text{m}^2/\text{day}$ の初期値を与えた。また境界条件となる34節点の地下水位は前節で求めた推定値

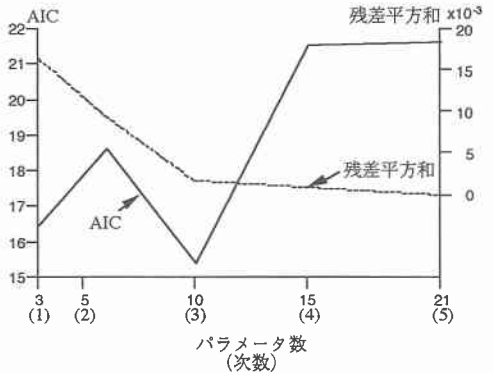


図-4 AICによる最適次数

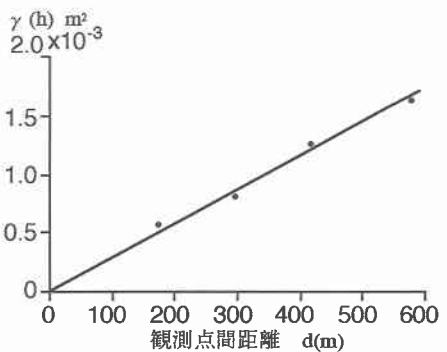


図-5 地下水位変動量のバリオグラム

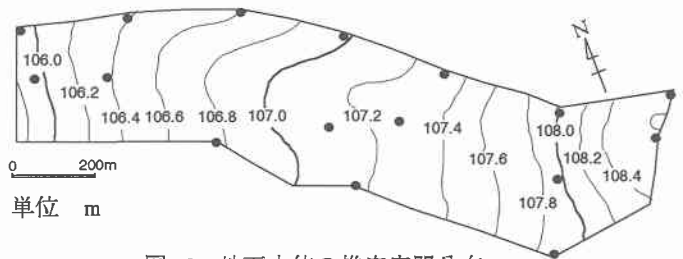


図-6 地下水位の推定空間分布

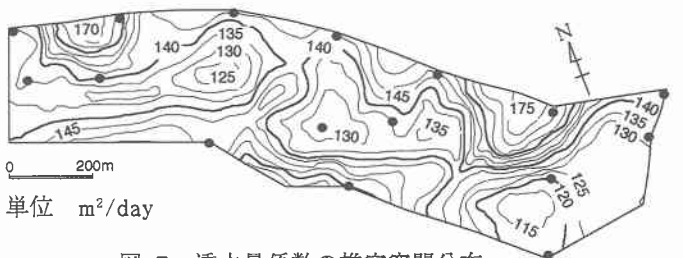


図-7 透水量係数の推定空間分布

を与え、36節点の地下水位を逆問題で求める。有限要素法で計算された地下水位が観測値に近づくまで(21)式を使用して繰り返し計算を行う。この時の評価基準には計算地下水位と観測地下水位の差の平方和が 1.0×10^{-3} 以下でかつその変化量が 1.0×10^{-4} であるとき収束したとする。要素内では透水量係数を一定値とし、52要素の透水量係数を推定した。この透水量係数に基づき内挿補間により解析領域の空間分布を推定した結果を図-7に示す。帯水層の主体は砂礫であり、透水量係数の空間的変動は帯水層厚の変化によるものと想定され、No.13観測井付近で $115\text{m}^2/\text{day}$ オーダの最小値を呈している。

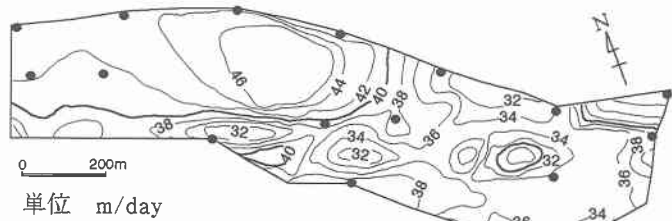


図-8 透水係数の推定空間分布

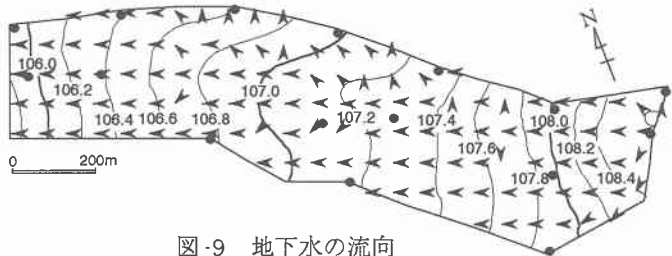


図-9 地下水の流向

5.3 透水係数と流速・流向の推定

前節で推定した透水量係数と地下水位から水深を求め透水係数を求めた。それを図-8に示す。さらに、この結果をもとに地下水の流向を推定した結果を図-9に示す。対象領域の中央上部から西側にかけて透水係数が大きく、流向は牛朱別川の方向を向いており、地下水は川へ流動しているのが認められる。これは解析期間が冬期間であるため、牛朱別川は渇水期に相当し地下水から涵養がなされていることを示す。また、地下水流速は $0.04 \sim 0.79\text{m}/\text{day}$ の範囲であり、最大流速地点は水位等高線が密な砂質土から成る右側上流部である。一方、最小流速はシルト質土から成る帯水層中央下部において出現する。

6 まとめ

本研究は、地点地下水位が弱定常過程を満足する確率変数と仮定し、統計的線形手法を用いて、任意の非観測点における地下水位を推定し、逆問題として、透水量係数、透水係数の空間分布と地下水の流向を示した。その結果、本解法は地下水位観測値のみから自然帯水層におけるパラメータを精度よく推定できることを示した。

本研究の一部に室蘭工業大学高度化推進プロジェクトの研究費補助を受けた。また、資料整理、データ解析に本学4年目の小澤誠志・日下裕貴の両君の多大な協力を得た。記して感謝の意を表わす。

参考文献

- 1) 片山 徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，pp.117-132,1983.
- 2) 林 知己夫，鈴木達三，赤池弘次：統計学特論，情報量基準と統計モデル・統計的社会調査法，日本放送出版協会，pp9-45,1986.
- 3) Delhome,J.P:Kriging in the Hydrosciences,Ad.Water Resour.,1-5,pp.251-266,1978
- 4) 藤間 聡：統計的線形化手法による透水係数の空間分布推定，第30回水理講演会論文集，pp301-306,1986.
- 5) 中川 徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，pp97-106,1983.