Ⅱ－18　境界要素法における開境界条件式の検討

北海道東海大学大学院　学生員　野村　圭司
北海道東海大学工学部　正員　浜中建一郎

1．まえがき

平面２次元波動場を、境界要素法で解く際、開境界、部分反射境界及び入射吸収境界に妥当な境界条件を与えることが重要である。Hamanaka(1995)、浜中(1995)は従来用いらてきた開境界条件式では、数値計算上見かけの反射波が現れることを示し、同時に上記の３つの境界に対し、ほぼ完全な新しい境界条件式を提案した。さらにいくつかの計算例により、提案した条件式から妥当な解が得られることを示した。

しかしながら、この条件式を導く際に、開口部の両側の防波堤が開口部の延長線上に位置しているという仮定が用いられた。実際の港では開口部の両側の防波堤は適当な角度を持っていることも多く、上の仮定は成り立たない。

このことから、本研究では、開口部の外側にも領域をもうけ、内側と外側各々に境界要素法を適用し、開口部ではポテンシャルの接続条件を用いて解いた解と、開口部に提案した開境界条件式を直接適用して解いた解とを比較し、両方法により同じ解が得られること、従って角度を持った防波堤によって作られる開口部に対しても、提案した開境界条件式が妥当であることを示す。

2．基礎方程式と積分方程式

流体運動は非圧縮、非粘性、非回転と仮定する。今、波動場が時間的に周期的であると仮定すると、その速度ポテンシャルは（∧：有次元量）

$$\hat{\Phi} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\phi} e^{-i\hat{\omega}\hat{t}}\right\} \quad : \quad \hat{\omega}\text{ は角周波数}$$

と表せる。
全ての変量を$\hat{\omega}$と重力加速度$\hat{g}$とで無次元化すると

$$(x,y,z) = (\hat{x},\hat{y},\hat{z})\hat{\omega}^2/\hat{g} \quad , \quad (\eta,h) = (\hat{\eta},\hat{h})\hat{\omega}^2/\hat{g} \quad , \quad t = \hat{\omega}\hat{t} \quad , \quad \overline{\phi} = \hat{\phi}\hat{\omega}^3/\hat{g}^2$$

基礎方程式は３次ラプラス方程式で、水面$(z=0)$と底面$(z=-h)$での境界条件と共に以下の様に表される。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial z^2} = 0 \\ &\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z} = \overline{\phi} \quad on \quad z = 0 \\ &\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial z} = 0 \quad on \quad z = -h \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Examination of open boundary condition with BEM
by Keiji NOMURA and Ken-ichro HAMANAKA

さらに

$$\overline{\phi} = \phi(x,y)\cosh k(z+h)$$

として変数分離を行うと、以下の Helmholtz 方程式が得られる。

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \tag{2}$$

ここで

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

水面の境界条件から

$$k\tanh kh = 1$$

(2)式の Helmholtz 方程式に対する Green の公式は

$$\int_V \left\{\phi\left(\Delta G + k^2 G\right) - G\left(\Delta\phi + k^2\phi\right)\right\}dv = \int_S \left(\phi\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)ds \tag{3}$$

と表される。ここでVは考えている領域で、Sはその境界、νは境界上の外向法線を表す。(3)式における関数Gとして、(2)式を満たし特異性を有する０次の第１種ハンケル関数

$$G = H_0^{(1)}(kr) \quad , \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tag{4}$$

これは、$r=0$で特異点となる(2)の Helmholtz 方程式の主要解である。

これを用いると、(3)式は

特異点$P:(x_0, y_0)$が領域内にあるとき

$$4i\phi(P) = \int_S \left(\phi\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)ds \tag{5}$$

特異点が境界上にあるとき

$$2i\phi(P) = \int_S \left(\phi\frac{\partial G}{\partial \nu} - G\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)ds \tag{6}$$

となる。境界要素法では、(6)式を離散化して、境界上のポテンシャルに関する連立１次方程式として解き、得られた境界上のポテンシャルから(5)式により領域内の任意の位置でのポテンシャルが求められる。

なお(4)式のハンケル関数は特異点から充分離れた遠方境界では、特異点から離れる方向に進行する波動解となり、放射条件を満たしている。

3. 開境界条件と離散化

Hamanaka (1995)、浜中(1995)によれば、開境界条件は

$$2i\phi(P) = \int_{S_0} G\frac{\partial \phi}{\partial \nu}ds \tag{9}$$

で与えられる。ここでS_0は開境界で、特異点Pは開境界上にある。

始めに(6)式の離散式を示す。境界を小さなセグメントで離散化し、通し番号を付け、ポテンシャルと特異関数はセグメントの中央点の値で代表させる。特異点がi番目のセグメントにあるとすると(6)式は

$$2i\phi_i = \sum_j^S \left(\phi_j \overline{E}_{ij} - E_{ij}\overline{\phi}_j\right) \quad , \quad \overline{\phi}_j = \frac{\partial}{\partial \nu}\phi_j \tag{10}$$

ここで$i \neq j$のとき

$$E_{ij}=\int_{\Delta S_j} G ds = G\left(x_j, y_j : x_i, y_i\right)\Delta S_j$$

$$\overline{E}_{ij}=\int_{\Delta S_j}\frac{\partial G}{\partial \nu}ds=\frac{\partial}{\partial \nu}G\left(x_j, y_j : x_i, y_i\right)\Delta S_j$$

$i=j$ のときは特異点を除いた主値積分から

$$E_{ij}=\Delta S_j+\frac{2i}{\pi}\left(\log\frac{k\Delta S_j}{4}-1+\gamma\right)\Delta S_j$$

$$\overline{E}_{ij}=0$$

となる。

(9)式も同様に離散化すると以下となる。

$$2i\phi_j=\sum_p^{S_0}E_{jp}\overline{\phi}_p \tag{11}$$

開境界上では未知数はポテンシャルとその法線微分の両方であるから、(10)式に(11)式を連立させて解くことが出来る。しかしながら扱う行列は密行列であり、計算機容量を考慮すると、未知数の数を低減することは重要と思われる。従ってあらかじめ(11)式を(10)式に代入し未知数を半減させる。

開境界以外の境界を S_1 とし $S=S_0+S_1$ とする。(11)式を(10)式に代入し整理する。

(10)式の特異点（左辺の i 番目）が S_1 上にあるときは

$$2i\phi_i=\sum_j^{S_0}\left(\sum_p^{S_0}\frac{1}{2i}E_{pj}\overline{E}_{ip}-E_{ij}\right)\overline{\phi}_j+\sum_j^{S_1}\left(\phi_j\overline{E}_{ij}-E_{ij}\overline{\phi}_j\right) \tag{12}$$

となる。

(10)式の特異点が開境界(S_0)上にあるときは左辺にも(11)式を代入し

$$\sum_j^{S_0}\left(\sum_p^{S_0}\frac{1}{2i}E_{pj}\overline{E}_{ip}-2E_{ij}\right)\overline{\phi}_j+\sum_j^{S_1}\left(\phi_j\overline{E}_{ij}-E_{ij}\overline{\phi}_j\right)=0 \tag{13}$$

となる。

部分反射境界に対しては反射率を R とすると(9)式の代わりに

$$\frac{2i}{1+R}\phi_i(P)=\int_{S_0}\frac{G}{1-R}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}ds \tag{14}$$

で与えられる。この境界でも未知数はポテンシャルとその法線微分の両方であるから、(11)式と同様に(14)式を離散化して連立させるか、(10)式に代入して(12)または(13)式と同様に整理すれば良い。

特異点が S_1 上のときは

$$2i\phi_i=\sum_j^{S_0}\left(\sum_p^{S_0}\frac{1}{2i}\frac{1+R}{1-R}E_{pj}\overline{E}_{ip}-E_{ij}\right)\overline{\phi}_j+\sum_j^{S_1}\left(\phi_j\overline{E}_{ij}-E_{ij}\overline{\phi}_j\right) \tag{15}$$

S_0 上のときは

$$\sum_j^{S_0}\left(\sum_p^{S_0}\frac{1}{2i}\frac{1+R}{1-R}E_{pj}\overline{E}_{ip}+\frac{2R}{1-R}E_{ij}\right)\overline{\phi}_j+\sum_j^{S_1}\left(\phi_j\overline{E}_{ij}-E_{ij}\overline{\phi}_j\right)=0 \tag{16}$$

(12)と(13)式において開境界以外の境界 S_1 上では、物理的境界条件により $\overline{\phi}_j=\partial\phi_j/\partial\nu$ は ϕ_j で表すことが出来、未知数が ϕ_j だけとなる。

なお、入射・吸収境界では、入射波のポテンシャル ϕ_I と領域内から外へでていくポテンシャル ϕ_T とを分離して考える。ϕ_I は題意から明らかであり、離散化した積分方程式の定数項となる。ϕ_T には開境界条件式(9)が適用でき、離散化したときは(12)、(13)式が用いられる。

4.　２領域接続法

図１の様に、角度を持った防波堤によって作られる開口部に対し、提案した開境界条件が妥当であることを示すために、図２の様に開口部の外側にもう一つの領域を設定した２領域接続法を考える。開口部の内側を領域１、外側を領域２とし、各々の領域でポテンシャルをϕ_1、ϕ_2とする。各々の領域に対し通常の境界要素法を適用するが、そのとき開口部での未知数はポテンシャルとその法線微分との両方である。二つの領域の開口部での接続条件として

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad \text{on 開口部}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} \qquad \text{on 開口部}$$

を与える。上の条件のもとで積分方程式を離散化すれば、未知数の数と方程式の数とは一致し解くことができる。

このとき、領域２を囲む３つの境界には提案した開境界条件式を用いるが、この様な場合の妥当性はHamanaka(1995)、浜中(1995)で示されている。

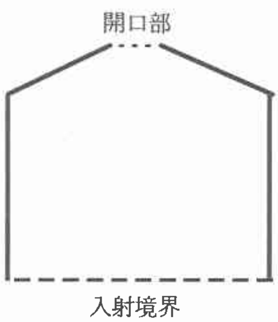


図１

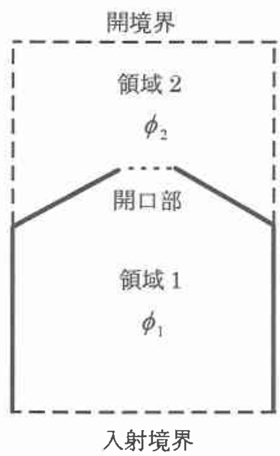


図２

5.　開境界条件の妥当性

開口部に、提案した開境界条件式を直接適用する場合は、図１の様に、図２の領域１だけを考える。

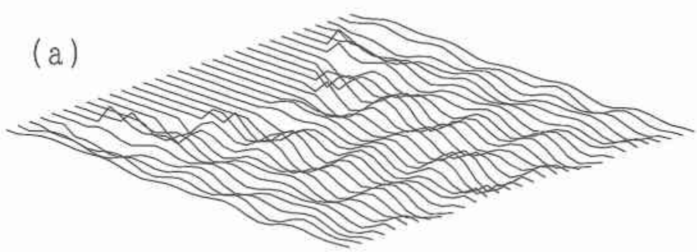
図３と図４は開口部が内側に 45°前後で突き出した例で、(a)は開口部に開境界条件式を適用した場合、(b)は２領域接続法で求めた場合で、領域１だけを図示している。両図の間に有意な差は認められず、ほぼ完全に一致している。このことは、この様に外側に突き出した開口部に対しても、提案した開境界条件式が妥当であることを示している。

図５と図６は、外側に開口部が突き出した場合である。図３、４と同様、(a)は開口部に開境界条件式を適用した場合で、(b)は２領域接続法で求めた場合である。この場合もやはり両図に有意な差は認められず、開境界条件式が妥当であることを示している。

また、図示は消略するが、他にも種々の防波堤の配置に対し同様の計算を行ったが、有意な差が見られる例はなかった。

6. まとめ

Hamanaka(1995)、浜中(1995)によって提案された新しい開境界条件式は、開口部とその両側の防波堤が直線上にあるとの仮定の下に導かれた。本研究では、そのような配置にない場合にも提案した開境界条件式が適用可能であることを示すために、開口部の外側にもう一つの領域を設け、２領域接続法により解いた。その結果を、開口部に直接開境界条件式を適用した場合と比較し、両者の間に有意な差が生じないこと、すなわち、直線配置でない場合にも、提案した開境界条件式が適用可能であることが示された。



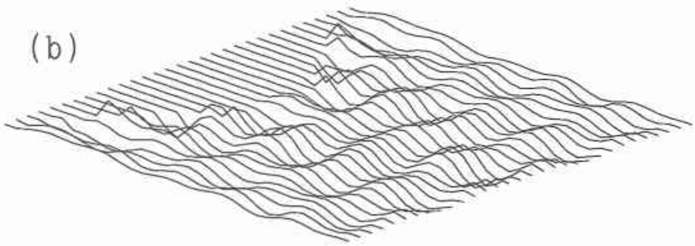
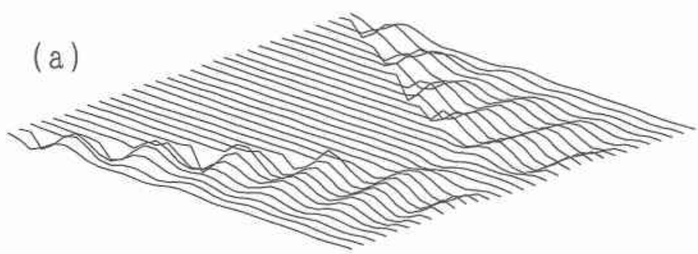


図３　開口部近傍の波形
(a) 開境界条件適用
(b) ２領域接続法



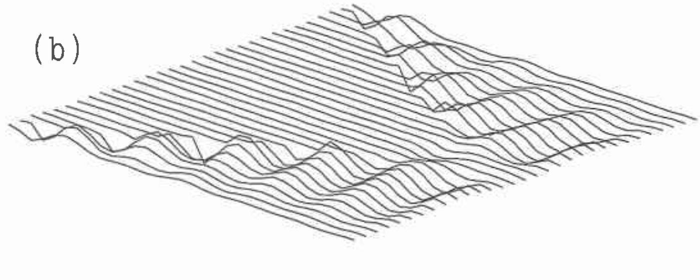
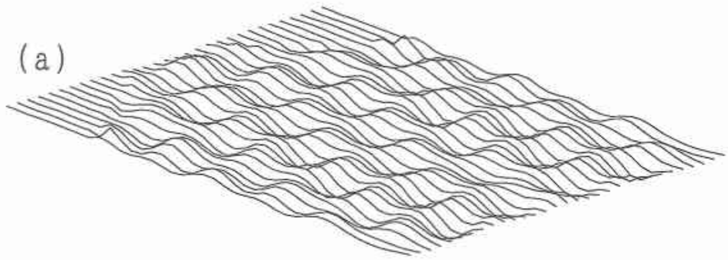


図４　開口部近傍の波形
(a) 開境界条件適用
(b) ２領域接続法



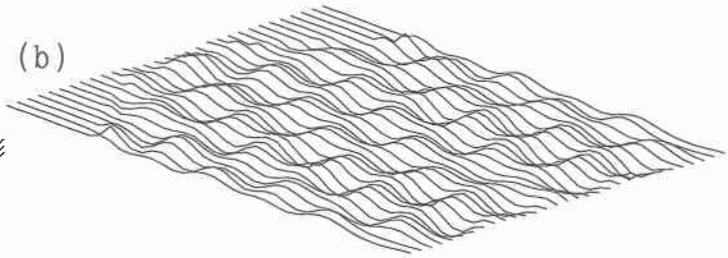
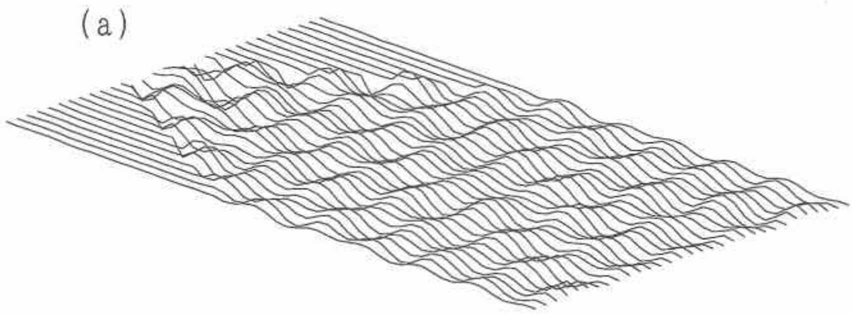


図５　開口部近傍の波形
(a) 開境界条件適用
(b) ２領域接続法



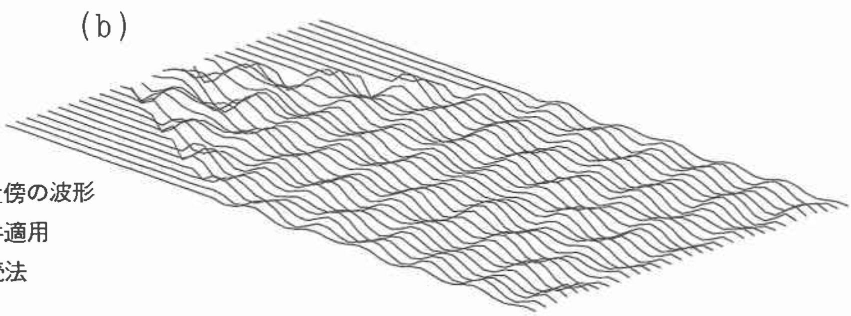


図６　開口部近傍の波形
(a) 開境界条件適用
(b) ２領域接続法

参考文献

Hamanaka,K.(1995) : Fundamental solution and boundary condition on osillations in harbors of arbitrary geometry,12th Australasian Coastal and Ocean Engg. Conf., pp.163-168

浜中建一郎(1995) : グリーンの公式を用いた静穏度解析における種々の境界条件について，海岸工学論文集　第42巻，No.2，pp.996-1000