

II - 17

非定常 Green 関数について

北海道東海大学工学部 学生員 大橋 正臣  
 北海道東海大学工学部 正員 濱中建一郎

1. まえがき

港湾の様な有限領域内を、時間と共に速度と向きを変えながら航走する船舶により発生する走航波を解析することを考える。この場合の波動場は、非定常・3次元で、さらに境界面(船舶の没水面)は時間と共にその位置を変える。このような波動場を解くには、純解析的には殆ど不可能と思われ、何らかの数値解析法が必要となる。しかしながら、数値解析法の中でも、差分法や有限要素法では、未知数の数が多くなり過ぎる(3次元のため)と同時に移動する境界面の扱いが非常に煩雑になることが予想される。一方、水面と底面の境界条件を満たす Green 関数を用いた境界要素法では、船舶の没水境界面と防波堤の鉛直壁面にだけ未知数を配置しておけばよく、この問題の解法としては最適と考えられる。しかしながら、波動場は非定常であるため、周期解を仮定できず、水面の境界条件はポテンシャルとその法線微分との関係式になっていない。そのため通常の境界要素法は適用できない。

このことから本研究では、基礎方程式と境界条件を Laplace 変換することにより、水面の境界条件をポテンシャルとその法線微分との関係にし、その変換した空間で Green 関数を考え、問題を解き、最後に実空間に逆変換することを考える。その第一段階として、始めに Laplace 変換した空間で水面と底面の境界条件、及び、実空間で時刻  $t = 0$  での条件(Laplace 変換を用いることによって生ずる条件)を満たす Green 関数を導出する。次に得られた Green 関数の収束性に関する性質を検討する。

2. 基礎方程式と境界条件及びその Laplace 変換

今、水深一定、流れはポテンシャル流れと仮定する。

有次元量に  $\hat{\phantom{x}}$  を付けて表し、水深  $\hat{h}$  と重力加速度  $\hat{g}$  で無次元化する。

$$(x, y, z) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) / \hat{h} \quad t = \sqrt{\frac{\hat{g}}{\hat{h}}} \hat{t} \quad \phi = \hat{\phi} / \sqrt{\hat{g}\hat{h}^3} \quad \eta = \hat{\eta} / \hat{h}$$

$\phi$  : 速度ポテンシャル、 $z$  : 鉛直成分、 $x, y$  : 水平成分

$\nu$  : 領域内から外に向かう法線方向、 $\eta$  : 水面変位、

自由表面での境界条件を線形化すると、速度ポテンシャル

に対する基礎方程式と境界条件は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{on} \quad z = 0 \quad \dots \dots (2.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad \dots \dots (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -1 \quad \dots \dots (2.3)$$

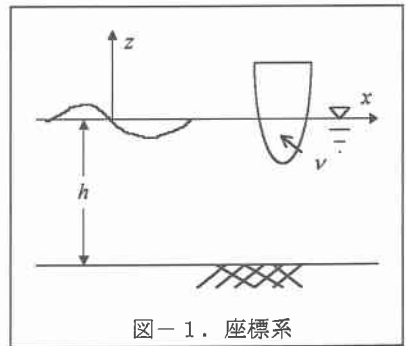


図-1. 座標系

Non-steady Green function

by Masami OHASHI and Ken-ichiro HAMANAKA

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = V_B \quad \text{on the body} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$V_B = V_B(x, y, z, t)$$

ふたつの水面の境界条件から  $\eta$  を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

一方、 $(x_0, y_0, z_0)$  で特異性を有し、特異点以外では基礎方程式を満たし、水面・底面の境界条件を満たす（構造物上の境界条件を除く）、Green 関数 ( $G$ ) の基礎方程式と境界条件は、

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -1 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

今、境界要素法を用いて解くことを考えているが、水面の境界条件は上式のようにポテンシャル  $\phi$  とポテンシャルの法線微分  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  の関係になっていないため、次に示す Laplace 変換を用いることを考える。

Laplace 変換は以下のように定義される。

$$\mathcal{L}(\phi) = \bar{\phi}(x, y, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} \phi(x, y, z, t) dt \quad \dots \dots (8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\bar{\phi}) = \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st} \bar{\phi}(x, y, z, s) ds \quad \dots \dots (9)$$

$s$  は一般に複素数  $s = \alpha + i\omega$  で、 $\alpha$  は収束座標であり、 $\phi$  は原関数で  $\bar{\phi}$  は像関数である。

(9)式は Bromwich-Wagner の積分で、 $\alpha$  を通る虚軸に平行な直線上の積分を表す。

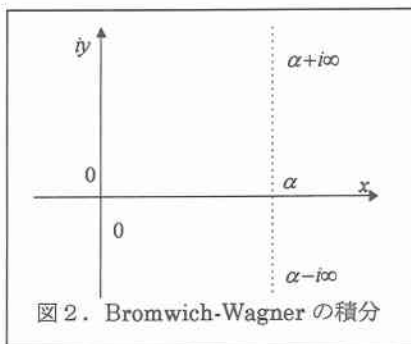


図 2. Bromwich-Wagner の積分

ポテンシャルに対する基礎方程式・境界条件を Laplace 変換すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -1 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + s^2 \bar{\phi} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \nu} = \bar{V}_B(x, y, z, s) \quad \text{on } x = x(s), y = y(s), z = z(s) \\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{on } t = 0 \quad z = 0 \end{array} \right. \quad \dots \dots \dots (10)$$

Green 関数に対する基礎方程式を Laplace 変換すると ( $\mathcal{L}(G) = \bar{G}$  とする) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial z^2} = -\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -1 \\ \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} + s^2 \bar{G} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \\ G = \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \quad t = 0 \end{array} \right. \dots \dots (11)$$

Laplace 変換をした場合は、水面の境界条件がポテンシャル  $\phi$  とポテンシャルの法線微分  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} (= \frac{\partial \phi}{\partial z})$  との関係となっているので境界要素法 ( Laplace 変換後) で解くことが出来る。

### 3. Green 関数の導出

実空間での 3 次元ラプラス方程式の主要解  $G_0$  , すなわち(5)の解は、次式となる。

$$G_0 = \frac{1}{4\pi r}$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

基礎方程式(5)と底面における境界条件(6)を満足する Green 関数の一般形は次のように表される。

$$G = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r'} + \int_0^\infty g(x, y, t) \frac{\cosh k(1+z)}{\cosh k} dk \dots \dots (12)$$

(12)において、全体で水面の境界条件を満たすような  $g(x, y, t)$  の Laplace 変換  $\bar{g}(x, y, s)$  を決めるために、第 1 項・第 2 項を積分変換する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} = \int_0^\infty e^{-k(z-z_0)} J_0(kR) dk \\ \frac{1}{r'} = \int_0^\infty e^{-k(z+2+z_0)} J_0(kR) dk \end{array} \right. \dots \dots (13)$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$J_0(kR)$  : 0 次の bessel 関数

(13)を(12)に代入、

$$G = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{4\pi} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) + g(x, y, t) \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k} \right] dk$$

この式を Laplace 変換して ( $\mathcal{L}(g) = \bar{g}$  とする) 、

$$\bar{G} = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{4\pi s} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) + \bar{g}(x, y, s) \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k} \right] dk \dots \dots (14)$$

上式を(11)の水面の境界条件 (Laplace 変換後) に代入することにより、

$$\bar{g}(x, y, s) = \frac{\cosh k(z_0 + 1)}{2\pi e^k} \frac{k - s^2}{s(s^2 + \omega^2)} J_0(kR)$$

この時、 $\omega^2 = k \tanh k$  と置き換える。

従って Green 関数は ((11)式に代入) , 以下の式となる。

$$\bar{G} = \frac{1}{4\pi sr} + \frac{1}{4\pi sr'} + \int_0^\infty \frac{\cosh k(z_0 + 1) \cosh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} \frac{k - s^2}{s(s^2 + \omega^2)} J_0(kR) dk \quad \dots \dots (15)$$

これを逆ラプラス変換して、

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(\bar{G}) = G &= \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r'} \\ &+ \int_0^\infty \frac{\cosh k(z_0 + 1) \cosh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} \left\{ \frac{k}{\omega^2} - \left(1 + \frac{k}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) \right\} J_0(kR) dk \quad \dots \dots (16) \end{aligned}$$

#### 4. Green 関数の検証

$t$ -空間での Green 関数( $G$ ) の検証

始めに時間  $t = 0$  の時の条件(11.4)式を確かめる。

(16)式を(13)式により積分形にする。

$$\begin{aligned} G &= \int_0^\infty \left[ \frac{1}{4\pi} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh k(z_0 + 1) \cosh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} \left\{ \frac{k}{\omega^2} - \left(1 + \frac{k}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) \right\} J_0(kR) \right] dk \end{aligned}$$

$t = 0, z = 0$  のとき、

$$G = 0$$

Green 関数の時間( $t$ )微分は、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \int_0^\infty \left[ \frac{\cosh k(z_0 + 1) \cosh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} \left( \omega + \frac{k}{\omega} \right) \sin(\omega t) J_0(kR) \right] dk$$

従って、 $t = 0$  のとき、

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

このことは(11.4)式を満たす。

次に、水面での境界条件(10.3)式を確かめる。

Green 関数の  $z$  微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z} &= \int_0^\infty \left[ -\frac{k}{4\pi} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k \cosh k(z_0 + 1) \sinh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} \left\{ \frac{k}{\omega^2} - \left(1 + \frac{k}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) \right\} J_0(kR) \right] dk \end{aligned}$$

Green 関数の時間( $t$ ) 2階微分

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \int_0^\infty \left[ \frac{\cosh k(z_0 + 1) \cosh k(z + 1)}{2\pi e^k \cosh k} (\omega^2 + k) \cos(\omega t) J_0(kR) \right] dk$$

(7)式の水面の境界条件に代入し、 $\omega^2 = k \tanh k$  を用いることにより、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[ -\frac{k \cosh k(z_0+1)}{2\pi e^k} J_0(kR) + \frac{k \tanh k \cosh k(z_0+1)}{2\pi e^k} \left\{ \frac{k}{\omega^2} - \left(1 + \frac{k}{\omega^2}\right) \cos(\omega t) \right\} J_0(kR) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh k(z_0+1)}{2\pi e^k} (\omega^2 + k) \cos(\omega t) J_0(kR) \right] dk \\ &= 0 \end{aligned}$$

このことは(10.3)式を満たす。

$s$ -空間での Green 関数( $\bar{G}$ )の検証

水面の境界条件(11.3)式を確かめる。

(15)式を(13)式により積分形にする。

$$\bar{G} = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{4\pi s} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) + \frac{\cosh k(z_0+1) \cosh k(z+1)}{2\pi e^k \cosh k} \frac{(k-s^2)}{s(s^2+\omega^2)} J_0(kR) \right] dk$$

Green 関数の  $z$  微分は、

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial z} = \int_0^\infty \left[ -\frac{k}{4\pi s} \left\{ e^{-k(z-z_0)} + e^{-k(z+2+z_0)} \right\} J_0(kR) + \frac{k \cosh k(z_0+1) \sinh k(z+1)}{2\pi e^k \cosh k} \frac{(k-s^2)}{s(s^2+\omega^2)} J_0(kR) \right] dk$$

(11)式の水面の境界条件に代入。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial z} + s^2 \bar{G} \right|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[ -\frac{k \cosh k(z_0+1)}{2\pi s e^k} J_0(kR) + \frac{k \tanh k \cosh k(z_0+1)}{2\pi e^k} \frac{(k-s^2)}{s(s^2+\omega^2)} J_0(kR) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2 \cosh k(z_0+1)}{2\pi s e^k} J_0(kR) + \frac{s^2 \cosh k(z_0+1)}{2\pi e^k} \frac{(k-s^2)}{s(s^2+\omega^2)} J_0(kR) \right] dk \\ &= 0 \end{aligned}$$

このことは(11.3)式を満たす。

(15)・(16)式は、基礎方程式・底面の境界条件を満たしている事は明らかであるから上の検証により Green 関数としての条件を満たしている。

## 5. Green 関数の検討

得られた Green 関数の収束性について検討する。

始めに  $s$ -空間での(15)式を検討する。第3項の被積分関数の分母にある  $s(s^2+\omega^2)$  が零になるには、 $s$ の実部・虚部が共に零になる必要があり、Laplace 変換では  $s$ の実部は正値であるから、この分母による収束性の問題はない。次に  $R$ が零に近ずいた時を検討する。図3と図4は、(15)式の第3項を数値積分で求めたものである。数値積分は二重指数関数型公式を用いた。特異点は  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -0.5)$ 、独立変数は  $(y, z) = (0, -0.5)$  で、 $x = R$ を横軸に積分値を示している。図3は  $x = 0$ の近傍の詳細図で、図4は一般図である。これによればいずれの場合も積分値は収束しており問題はない。

次に、図5と図6は実空間 ( $t$ -空間)での Green 関数(16)式の第3項の積分結果である。特異点と独立変数の座標は、図3・図4の場合と同じである。いずれの場合も積分値は収束している。

図示は省略するが、 $t$ が非常に大きくなる(無次元時間  $t > 1000$ )と  $\cos(\omega t)$ は  $\omega$ の変化に従って激しく振動するため積分値は収束しなくなる。このような場合は別な方法で積分を近似する必要がある。

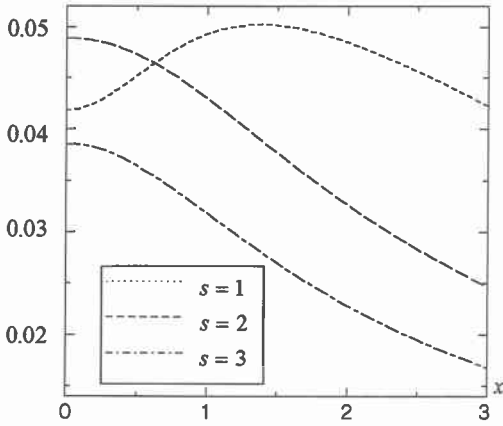


図3.  $x$  の変化に伴う  $\bar{G}$  の積分項

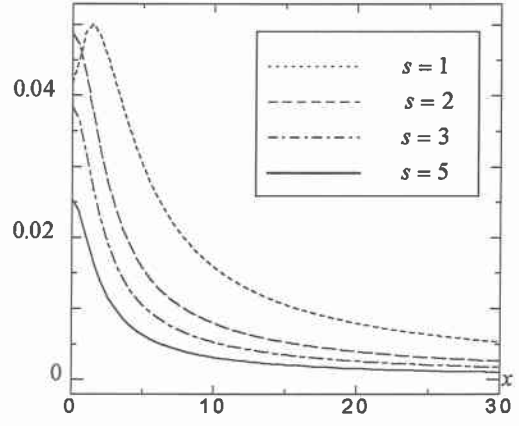


図4.  $x$  の変化に伴う  $\bar{G}$  の積分項

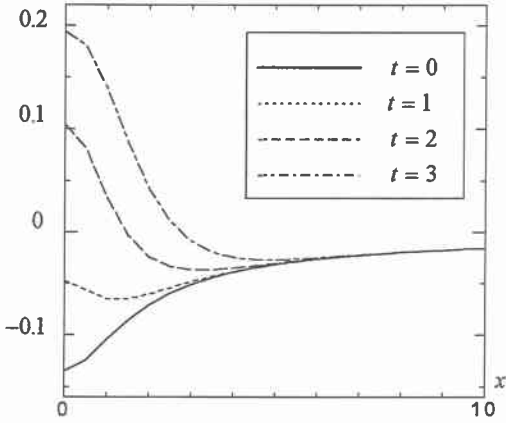


図5.  $x$  の変化に伴う  $G$  の積分項

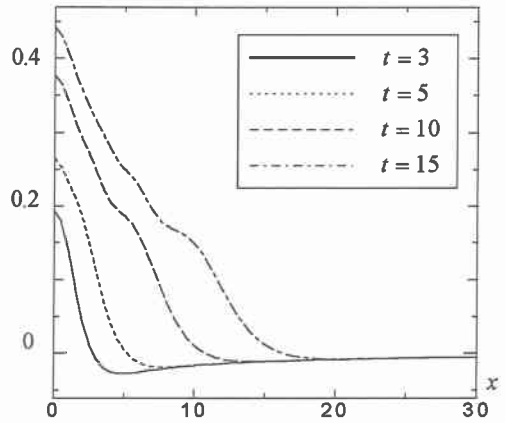


図6.  $x$  の変化に伴う  $G$  の積分項

## 6. あとがき

船舶の航走により発生する非定常波動場を解くための非定常 Green 関数を導出した。この Green 関数を用いた境界要素法で波動場を解くには、以下のような手順となるだろう。

- (1) 船舶の港口から接岸点までの走航経路と速度を決める。
  - (2) 船舶の没水面の位置と法線方向の速度を時間の関数として数値的に求める。
  - (3) 上の没水面の位置と法線速度を Laplace 変換する。
  - (4) 各  $s$  の値ごとに  $s$ -空間での Green 関数を用いた境界要素法で、防波堤上と没水面上でのポテンシャルを求める。
  - (5) 得られた解から水面のポテンシャルを求める。
  - (6) 水面のポテンシャルを逆 Laplace 変換し、実空間での値にする。
- 具体的な解析結果は別の機会に報告する。