

II-16 エネルギー平衡方程式について

北海道東海大学大学院 学生員 工藤 康一
北海道東海大学工学部 正員 濱中建一郎

1. まえがき

ゆるやかに水深が変化する、任意の海底形状を持つ海域における不規則波の屈折の解析に、エネルギー平衡方程式が使われる。このエネルギー平衡方程式としては、Karlsson(1969)が導いた式とCollins(1972)が導いた式とがあるが、両式の表現は異なっている。しかしながら、両者共どの様な原理にもとずき導出したかを明確に示していないため、単なる表記法の違いであるか、本質的な違いであるかを判断することが出来ない。

このことから本研究では、不規則波に対するエネルギー平衡方程式を厳密に再導出し、上記の事柄を検討することを目的とする。

2. 単一物理的成分波に対する エネルギー平衡方程式

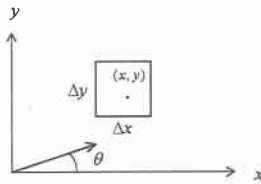


図2. 座標系

振幅を a とする波のエネルギーは次式で表される。

$$E = \frac{\rho g}{2} a^2 \quad (2.1)$$

この時の、 x 、 y 方向の各々のエネルギー・フラックスは、以下のように示される。ただし、座標系を図2の様により、 θ を波向き、 C_g を群速度とする。

$$\begin{cases} F_x = C_g E \cos \theta \\ F_y = C_g E \sin \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

一般に、図2の様に (x, y) を中心として $\Delta x \times \Delta y$ の微小領域を考えた場合、エネルギー保存則より、その領域内のエネルギーの時間 Δt に

おける変化は、その Δt 間のエネルギーの出入りの差に等しいと考えられる。よって、エネルギーの変化は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta E &= F_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y \right) \Delta y \Delta t - F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y \right) \Delta y \Delta t \\ &\quad + F_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta t - F_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (2.3)$$

x, y 方向の各々のエネルギーの出入りの差について、テイラー展開を行い二次以上の微小量を省略し整理して再記すると以下ようになる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\nabla \mathbf{F} \quad (2.4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y)$$

式(2.4)において、定常であるとし、式(2.2)を代入して整理すると以下ようになる。ただし、 $\theta = \theta(x, y, \theta_0)$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_g}{\partial x} E \cos \theta + \frac{\partial C_g}{\partial y} E \sin \theta \\ + C_g \frac{\partial E}{\partial x} \cos \theta + C_g \frac{\partial E}{\partial y} \sin \theta \\ + C_g E \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

式(2.5)は、物理的単一成分波に対するエネルギー平衡方程式となり、以下のようなことが確認できる。

(第一項と第二項)：水深変化の効果に伴うエネルギー・フラックスの変化を表す。

(第五項)：屈折の効果を表す。

(第三項と第四項)：水深変化の効果と屈折の効果とに釣り合うように E が変化することを表す。

3. 不規則波のエネルギー平衡方程式

不規則波を扱う場合でも、エネルギー保存則が成立するのは、あくまでも物理的成分波に対してである。この場合、波向きは場所によって変化する。それに対し、不規則波のエネルギー平衡方程式では、異なった場所での同じ波向きを持った成分波の間に、どのような関係が成立するかを物理的成分波のエネルギー保存則から導く。

不規則波のパワー・スペクトルは、微小振幅波理論で考えれば、次式のように表される。

$$S(\omega, \theta) : \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.1)$$

式(3.1)において、 ω は場所的に変化しないとし、これ以降、ある ω について方向スペクトルとその場所的な変化を考慮して、以下のように考えていく。

$$S(x, y, \theta) \quad (3.2)$$

不規則波を考えるとき、単一物理的成分波の場合と異なるのは次のような点にある。それは、ある (x, y) で、ある θ を中心に $\Delta\theta$ の幅を考え、この幅の中に存在するスペクトル成分波達を考える。この時、 $(\Delta x/2, \Delta y/2)$ 離れた位置において、各々の成分波達は θ の値を変化させている。その変化のさせ方には、次のような二つのことが考えられる。

- ①. 平行にずれる。
 - ②. $\Delta\theta$ が、広がるか、あるいは、狭まる。
- この二つの効果を考慮して、図3の様に (x, y) 点から $(\Delta x/2, \Delta y/2)$ 離れた場所でのエネルギー・フラックスを考える。

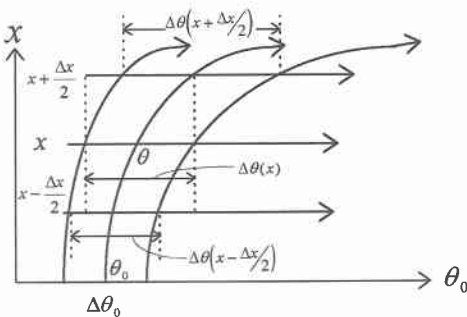


図3. 波向きの変化

沖の基準点で方向角が、 θ_0 を中心に $\Delta\theta_0$ の幅にある物理的成分波の位置 (x, y) でのエネルギー保存則は、 $\Delta x \times \Delta y$ の微小領域で考えると、次式で表せる。ただし、エネルギー・フラックスを

\tilde{F}_x, \tilde{F}_y とする。

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, \theta_0 \right) \Delta y \Delta \theta_0 \\ & - \tilde{F}_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, \theta_0 \right) \Delta y \Delta \theta_0 \\ & + \tilde{F}_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \theta_0 \right) \Delta x \Delta \theta_0 \\ & - \tilde{F}_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \theta_0 \right) \Delta x \Delta \theta_0 = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

それに対し、基準点での方向角 θ_0 が (x, y) で θ となっていると仮定し、そこでのスペクトル成分波のパワー・スペクトルを $S(x, y, \theta)$ として、それによるエネルギー・フラックスを F_x, F_y とすると、エネルギー保存則は、次式で表せる。

$$\begin{aligned} & F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, \theta + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta y \Delta \theta \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \\ & - F_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, \theta - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta y \Delta \theta \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \\ & + F_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \theta + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Delta x \Delta \theta \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right) \\ & - F_y \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \theta - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Delta x \Delta \theta \left(y - \frac{\Delta y}{2} \right) = 0 \quad (3.4) \end{aligned}$$

便宜上、式を以下のように表す。この時、 $\Delta F_x, \Delta F_y$ は、 x, y 方向の各々のエネルギーの出入りを示す。

$$\Delta F_x + \Delta F_y = 0 \quad (3.5)$$

ここで、スペクトル成分波のパワー・スペクトルを用いて、エネルギー・フラックスを表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} F_x &= C_g S \cos \theta \\ &= C_g(x, y) S(x, y, \theta) \cos \theta \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= C_g S \sin \theta \\ &= C_g(x, y) S(x, y, \theta) \sin \theta \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$: \theta = \theta(x, y, \theta_0)$$

以下、式(3.6), (3.7)を式(3.4)に代入し、式(3.4)の全ての量を (x, y, θ) の回りでTaylor展開することにより、 (x, y, θ) での値で推定する。

例えば、

$$\begin{aligned} & F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, \theta + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= C_g S \cos \theta + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial C_g}{\partial x} S \cos \theta + \frac{\Delta x}{2} C_g \frac{\partial S}{\partial x} \cos \theta \end{aligned}$$

$$+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}C_g\frac{\partial S}{\partial\theta}\cos\theta-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}C_g\sin\theta \quad (3.8)$$

一方、基準点での幅 $\Delta\theta_0$ が位置 (x,y) で $\Delta\theta$ あるとして、 $x+\frac{\Delta x}{2}$ での幅を求める。

$$\begin{aligned} &\theta\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,\theta_0+\frac{\Delta\theta_0}{2}\right) \\ &= \theta(x,y,\theta_0)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\Delta\theta_0}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta\theta_0}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\theta_0} \\ &\quad \quad \quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\theta_0}{2}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\theta_0^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

より、

$$\begin{aligned} &\Delta\theta\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \theta\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,\theta_0+\frac{\Delta\theta_0}{2}\right) \\ &\quad -\theta\left(x+\frac{\Delta x}{2},y,\theta_0-\frac{\Delta\theta_0}{2}\right) \\ &= \Delta\theta_0\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}+\frac{1}{2}\Delta x\Delta\theta_0\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\theta_0} \quad (3.10) \end{aligned}$$

同様に、

$$\Delta\theta\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)=\Delta\theta_0\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}-\frac{1}{2}\Delta x\Delta\theta_0\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\theta_0} \quad (3.11)$$

式(3.8)と式(3.10)及び、 $x-\frac{\Delta x}{2}$ におけるエネルギー・フラックスと式(3.11)から、 x 方向のエネルギーの出入りの差 ΔF_x は、以下の様になる。

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= \left(\frac{\partial C_g}{\partial x}S\cos\theta+C_g\frac{\partial S}{\partial x}\cos\theta\right. \\ &\quad \left.+\frac{\partial\theta}{\partial x}C_g\frac{\partial S}{\partial\theta}\cos\theta-\frac{\partial\theta}{\partial x}C_gS\sin\theta\right)\Delta x\Delta y\Delta\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} \\ &\quad +C_gS\cos\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\theta_0}\Delta x\Delta y\Delta\theta_0 \quad (3.12) \end{aligned}$$

同様に、 y 方向のエネルギーの出入りの差 ΔF_y は、以下の様になる。

$$\Delta F_y=\left(\frac{\partial C_g}{\partial y}S\sin\theta+C_g\frac{\partial S}{\partial y}\sin\theta\right.$$

$$\begin{aligned} &\left.+\frac{\partial\theta}{\partial y}C_g\frac{\partial S}{\partial\theta}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}C_gS\cos\theta\right)\Delta x\Delta y\Delta\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} \\ &\quad +C_gS\sin\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial\theta_0}\Delta x\Delta y\Delta\theta_0 \quad (3.13) \end{aligned}$$

よって、エネルギーの保存則は、式(3.12)式(3.13)を式(3.5)に代入し、両辺を $\Delta x\Delta y\Delta\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}$ で割り、

さらに、整理すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial C_g}{\partial x}S\cos\theta+\frac{\partial C_g}{\partial y}S\sin\theta\right) \\ &\quad +C_g\frac{\partial S}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\theta}{\partial y}\sin\theta\right) \\ &\quad +C_gS\left(-\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right) \\ &\quad +\frac{1}{\partial\theta/\partial\theta_0}C_gS\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\theta_0}\cos\theta+\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial\theta_0}\sin\theta\right)=0 \quad (3.14) \end{aligned}$$

従って、式(3.14)がスペクトル成分波に対するエネルギー平衡方程式となる。式(3.14)と物理的単一成成分波に対するエネルギー平衡方程式である式(2.5)と比較すると、式(3.14)について、以下のことが分かる。

- (第一項と第三項)：屈折の効果を表している。
- (第二項)：屈折に伴う θ の変化によるスペクトル成分波のずれを表している。
- (第四項)：幅 $\Delta\theta$ の変化の効果を表している。

4. Karlsson(1969)の提案式の誘導

次に Snell の法則を用いて屈折の効果を導入する。

$$\begin{aligned} k\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\theta+k\frac{\partial\theta}{\partial y}\sin\theta \\ = \frac{\partial k}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial k}{\partial x}\sin\theta \quad (4.1) \end{aligned}$$

式(4.1)の両辺を k で割り、整理したものと、式(4.1)の両辺を θ_0 で微分し、両辺を k で割って、整理したものとを、式(3.14)に、代入し整理すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial C_g}{\partial x}S\cos\theta+\frac{\partial C_g}{\partial y}S\sin\theta\right) \\ &\quad +C_g\frac{\partial S}{\partial\theta}\frac{1}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial k}{\partial x}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

$$-C_g S \frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial k}{\partial x} \cos \theta \right) = 0 \quad (4.2)$$

つづいて、波速 $C = \frac{\omega}{k}$ を用いて表すことを考える。ここで、 $k \cdot C = \omega$ とすると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial x} C + k \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{k}{C} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial k}{\partial y} C + k \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{k}{C} \frac{\partial C}{\partial y} \end{cases} \quad (4.3)$$

式(4.2)に、式(4.3)を代入して整理すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C C_g S}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial C C_g S}{\partial y} \sin \theta \right) \\ & + C_g \frac{\partial S}{\partial \theta} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) = 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

式(4.4)は、Karlsson(1969)の提案式と一致している。

5. 規則波に対する適用

規則波(物理的成分波)に対する適用性を考えてみる。まず、スペクトル密度を次の様にする。
 $S = E(x, y) \delta \{ \theta - \alpha(x, y) \} \equiv E \delta_\alpha \quad (5.1)$

式(4.4)のエネルギー平衡方程式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (C C_g)}{\partial x} S \cos \theta + C C_g \frac{\partial S}{\partial x} \cos \theta \\ & + \frac{\partial (C C_g)}{\partial y} S \sin \theta + C C_g \frac{\partial S}{\partial y} \sin \theta \\ & + C_g \frac{\partial S}{\partial \theta} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right) = 0 \quad (5.2) \end{aligned}$$

ここで、式(5.1)を式(5.2)に代入して θ で積分する。例えば、

$$\begin{cases} \int S \cos \theta d\theta = \int E \delta_\alpha \cos \theta d\theta = E \cos \alpha \\ \int S \sin \theta d\theta = E \sin \alpha \end{cases} \quad (5.3)$$

$\delta(x)$ 関数の微分に対しては、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \int f \frac{\partial \delta}{\partial x} dx = - \int \frac{\partial f}{\partial x} \delta dx = - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \\ & \begin{cases} \int \frac{\partial S}{\partial \theta} \sin \theta d\theta = -E \cos \alpha \\ \int \frac{\partial S}{\partial \theta} \cos \theta d\theta = E \sin \alpha \end{cases} \quad (5.4) \end{aligned}$$

又、

$$\begin{cases} \int \frac{\partial S}{\partial x} \cos \theta d\theta \\ = \int \left(\frac{\partial E}{\partial x} \delta_\alpha \cos \theta - E \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \delta_\alpha}{\partial \theta} \cos \theta \right) d\theta \\ = \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha - E \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha \\ \int \frac{\partial S}{\partial y} \sin \theta d\theta = \frac{\partial E}{\partial y} \sin \alpha + E \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha \end{cases} \quad (5.5)$$

従って、 θ で積分し、整理すると以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_g}{\partial x} E \cos \alpha + \frac{\partial C_g}{\partial y} E \sin \alpha \\ & + C_g \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha + C_g \frac{\partial E}{\partial y} \sin \alpha \\ & + C_g E \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cos \alpha \right) = 0 \quad (5.6) \end{aligned}$$

式(5.6)は、式(2.5)と一致している。

6. まとめ

以上の導出過程をまとめると以下の様になる。エネルギーの保存則は、通常の進行波としての物理的成分波のエネルギー・フラックスによって記述される。この場合、波向きは空間的に変化する。すなわち、ある位置 (x, y) で波向きが θ であった成分は、微小距離離れた位置 (x', y') では θ' となっている。位置 (x', y') で波向きが θ' の成分のスペクトルを、 θ 軸上でテイラー展開することにより、位置 (x', y') で波向きが θ である成分のスペクトルを近似する。このことにより、エネルギーの保存則は、 (x, y) と (x', y') との異なった位置での同じ方向 θ を持つ成分間の変化の様子を記述することになる。従って、式(4.4)の表現においては、 θ は x, y に独立となる。又、上記の意味で θ と x, y は独立とすると、Karlssonの表現とCollinsの表現は一致する。

参考文献

- Karlsson, T. (1969): Refraction of continuous ocean wave spectra, Proc. ASCE, Vol. 95, No. WW4, pp. 437-448
 Collins, J. I. (1972): Prediction of shallow-water spectra, J. Geophys. Res., Vol. 77, No. 15, pp. 2693-2702