

II-7 山地河川の3次元河床波発生に関する水理的解析

北海道大学 学生員 上 林 悟
北海道大学 正 員 長谷川和義

1. はじめに

山地河川の河床形態である階段状河床形状は、その外観等によりリブとステッププールに大別される。その特徴を簡潔に述べると、前者は流れに対して横断方向に直線的に大礫が堆積してステップ部を形成し、その外観は階段状であるのに対し、後者は楕円状に礫が堆積し、円状のプール部と流路幅が非常に狭まるステップ部を形成することである。通常時、これらの河床形態は人々の目を楽しませ、山地河川の生物にとって良好な生息環境を提供しているばかりではなく、流出する土砂量にも影響¹⁾を与えている。しかし、河床のアーミングコートが破壊される程の出水時には、激しい分級を伴い、上述の河床形態が発生・発達を繰り返していると考えられる。また流量が一定下の実験によれば、ステッププールの発生から消滅までの時間は非常に短いことが確認されており、実河川でも同様な現象が生じていると推測される。最近、多自然型川づくりの一環として階段状河床を造成するケースが増えている。こうした積極的なステッププールの利用のために階段状河床の構造や特性などを把握する必要性が高まっている。しかし、ステッププールに関して解明されている部分はリブのそれに比較して少ない。その一つの理由は、ステッププールが三次元的な構造を有していて、その解析が非常に複雑になることである。過去の著者ら^{2),3)}の研究により、ステッププールが射流上の三次元水面波と反砂堆による強制水面波波長との同調によって発生することが、実験的に確認されている。しかし、理論的には未だその発生が確認されないものといえる。そこで本論文では、流れを非静水圧・二次元浅水流として捉え、さらに、波によるせん断力の位相ずれを考慮するとともに流砂量式に流下方向、横断方向河床傾斜の効果を取り入れ、線形安定解析を試みた。そして、ステッププールの発生条件を導き、その結果を過去の実験値と比較した。

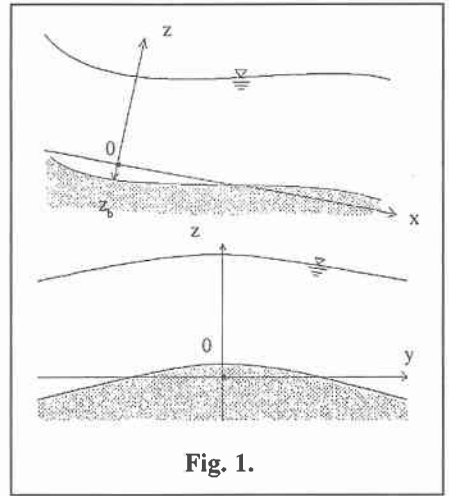


Fig. 1.

2. 基礎方程式

流れは、その変化が疑似定常流とみなせるほど河床の成長・減衰に対して十分遅いと仮定し、現象の波動性を考慮して非静水圧・二次元浅水流モデルとして扱う。細田らの研究⁴⁾によれば x, y, z 軸をそれぞれ Fig. 1 の様に定義したとき、流れの基礎式は以下の様に表すことができる。

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(Vh)}{\partial y} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial(U^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(UVh)}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{p}{\rho}\right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial(UVh)}{\partial x} + \frac{\partial(V^2h)}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_b \frac{\partial z_b}{\partial y} = -\frac{\tau_{by}}{\rho} \quad \dots (3)$$

Linear analysis of the origin of step-pool systems
by Kanbayashi, S. and Hasegawa, K.

この際、 x, y 方向流速 u, v の分布は z 軸方向に一様であると仮定して $u=U(x, y)$, $v=V(x, y)$ としている。また、 h は水深、 z_b は河床面、 ρ は密度、 $\tan\theta$ は平均河床勾配、 g は重力加速度、 $\tau_{bx,by}$ は各方向の底面せん断応力であり、添え字 b は河床の値であることを示す。圧力 p は、鉛直方向運動量方程式を積分することによって導くことができ、次の形に表される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= g(h - z_b - z) \cos\theta - UA \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) + UA \frac{\partial z_b}{\partial x} (1-m) + Uh \frac{\partial A}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) \\ &- Uh \frac{\partial B}{\partial x} (1-m) - VA \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) + VA \frac{\partial z_b}{\partial y} (1-m) + Vh \frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) \\ &- Vh \frac{\partial B}{\partial y} (1-m) + A^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) - AB(1-m) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ただし、 $A = U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y}$ $B = U \frac{\partial z_b}{\partial x} + V \frac{\partial z_b}{\partial y}$ $m = \frac{z_b + z}{h}$ $P = \int_{-z_b}^{h-z_b} \frac{p}{\rho} dz$

流砂量式に関しては、Kovacs ら⁵⁾の任意傾斜面上の掃流砂量式を基礎式として横断方向、縦断方向の重力効果を詳しく検討した次の式を適用する。

$$\begin{aligned} q_{bx}^* &= \xi^* u_p^* \quad q_{by}^* = \xi^* v_p^* \quad \dots (5, 6) \\ \xi^* &= (\tau^* - \tau_c^*) \left(\mu_f \cos\beta - \sin\theta - \frac{\cos\beta}{F} \tan\alpha \right)^{-1} \\ u_p^* &= u_b^* - \sqrt{\frac{a\tau_{co}^*}{\mu_c}} \left\{ \mu_f \cos\beta - \left(\sin\theta + \frac{\cos\beta}{F} \tan\alpha \right) \right\}^{0.5} \\ v_p^* &= \left(u_r^* v_b^* + \frac{a\tau_{co}^* \cos\beta}{\mu_c} \tan\omega \right) \left(u_r^* + a\tau_{co}^* \frac{\mu_f}{\mu_c} \cos\beta \frac{1}{u_p^*} \right)^{-1} \\ \tau_{co}^* &= \frac{4}{3} \frac{\mu_c}{aC_D} \quad \cos\beta = \frac{-\sin\theta \tan\alpha + \cos\theta}{F} \quad F = (\tan^2\alpha + \tan^2\omega + 1)^{1/2} \\ \frac{\tau_c^*}{\tau_{co}^*} &= \cos\beta \left\{ 1 - \frac{1}{\mu_c^2} \left(\frac{\tan^2\omega + 1}{F^2} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\beta} - \frac{2\cos\theta}{F\cos\beta} \right) \right\}^{0.5} - \frac{1}{\mu_c} \left(\sin\theta + \frac{\cos\beta}{F} \tan\alpha \right) \end{aligned}$$

ただし、 q_{bx}^*, q_{by}^* は x, y 方向の無次元流砂量、 u_p^*, v_p^* は x, y 方向の粒子の無次元流速、 $\tau^*, \tau_c^*, \tau_{co}^*$ は無次元の底面せん断応力、限界掃流力、シールズの限界掃流力である。また、平均河床面に対する x, y 方向の河床波の勾配を $\tan\alpha, \tan\omega$ とし、 β は河床の最大傾斜角を、 μ_r, μ_c は動、静止摩擦係数を、 $a^{0.5}$ は流速係数、 ζ は掃流層厚、 η_b は掃流層内の河床材料の占有率、 D は河床材料の粒径、 R は河床材料の水中比重をそれぞれ表す。

流砂連続式は (7) 式となり、 n は空隙率。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{1}{1-n} \left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} \right) \quad \dots (7)$$

次に upper regime の小規模河床波を扱う際に重要な、水面波に伴う底面せん断応力分布の位相ずれ効果を導入する。その効果に関しては、田中ら⁶⁾の進行波を伴う流れのせん断力に関する研究を応用する事とする。一般流によるせん断力を τ_0^* 、波による付加的せん断力を τ_φ^* とし、全せん断力を $\tau = \tau_0^* + \tau_\varphi^*$ と表すことにすれば、 τ_φ^* は、

$$\tau_\varphi^* = \frac{\tau_\varphi}{\rho RgD} = Fr_0^2 \cos\theta \sqrt{\frac{\kappa k \tau_0^*}{\sqrt{a} \tan\theta R}} (E_3 + iE_4) \tilde{u} \cos\phi \quad \dots (8) \quad \text{ただし、} \cos\phi = \frac{Fr_0}{\sqrt{1+Fr_0^2}}$$

$$\text{但し、 } E_0 D = \frac{k Fr_0 \cos \theta}{\kappa \sqrt{a R \tau_0^*}} \quad E_3 = \frac{-\frac{2}{\pi} (\ln \sqrt{E_0 D} + \gamma)}{\pi \sqrt{E_0 D} \left\{ \frac{2}{\pi} (\ln \sqrt{E_0 D} + \gamma)^2 + \frac{1}{4} \right\}} \quad E_4 = \frac{\frac{1}{2} - \pi E_0 D \left\{ \frac{2}{\pi} (\ln \sqrt{E_0 D} + \gamma) + \frac{1}{4} \right\}^2}{\pi \sqrt{E_0 D} \left\{ \frac{2}{\pi} (\ln \sqrt{E_0 D} + \gamma)^2 + \frac{1}{4} \right\}}$$

となる。ここに、 Fr_0 はフルード数、 κ はカルマン定数、 k は縦断方向の波数、 γ はオイラー定数、 $\cos \theta$ は流れの主流方向と波の進行方向が成す角度である。また、添え字 0 は、断面平均量を示す。

以上の基礎方程式に対し、線形無次元化を行う。すなわち、諸量の断面平均量からのずれを

$$U - U_0 \equiv u' = \tilde{u} U_0 \quad V = v' = \tilde{v} U_0 \quad h - h_0 \equiv h' = \tilde{h} h_0 \quad z_b = \tilde{z}_b h_0 \quad q_{bx}^* = q_{b0}^* (1 + \tilde{q}_{bx}^*) \quad q_{by}^* = q_{b0}^* \tilde{q}_{by}^*$$

のように表し、それぞれの無次元量を $\tilde{\quad}$ を付した量で定義する。さらに、軸に関して

$$x = \tilde{x} h_0 \quad y = \tilde{y} h_0 \quad t = \tilde{t} h_0 / U_0$$

なる無次元化を行い、(1)～(8)式に代入して 2 次以上の高次微小項を省略すると、以下の一連の式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \dots (9)$$

$$2 Fr_0^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + Fr_0^2 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + Fr_0^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{3} Fr_0^2 \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{1}{2} Fr_0^2 \frac{\partial^3 z_b}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{h}}{a} = -\frac{\tan \theta}{\tau_0^* \cos \theta} \tau_0^* \quad \dots (10)$$

$$Fr_0^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{3} Fr_0^2 \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}} - \frac{1}{2} Fr_0^2 \frac{\partial^3 z_b}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}} - \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{y}} = -\frac{Fr_0^2}{a} \tilde{v} \quad \dots (11)$$

$$\tilde{q}_{bx} = \frac{\sqrt{a} \tau_0^{*3}}{q_{b0}^* \mu_c \cos \theta} \left[\frac{\tan \alpha}{\mu_f} + \frac{3}{2} a^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\kappa k}{R \tau_0^* \tan \theta}} Fr_0^2 \cos \theta (E_3 + i E_4) \tilde{u} \cos \theta \right] \quad \dots (12)$$

$$\tilde{q}_{by} = \left(1 + \sqrt{\frac{\tau_{co}^* b \cos \theta}{\tau_0^*}} \right) \left(\tilde{v} + \sqrt{\frac{\tau_{co}^* \cos \theta \tan \theta}{\tau_0^* b \mu_c}} \right) \quad \dots (13)$$

$$q_{b0}^* = \frac{\sqrt{a} \tau_0^{*3}}{\mu_c \cos \theta} \left(1 - \frac{\tau_{co}^* \cos \theta}{\tau_0^*} - \sqrt{\frac{\tau_{co}^* b \cos \theta}{\tau_0^*}} + \frac{\tan \theta}{\mu_f} \right) \quad \dots (14)$$

$$-Fr_0 R \sqrt{\cos \theta} \left(\frac{\tau_0^*}{\tan \theta} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(1-n)}{q_{b0}^*} \frac{\partial \tilde{z}_b}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{q}_{bx}^*}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{q}_{by}^*}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \dots (15)$$

3. 解析

次の様な二重調和関数を用いて河床波波高の増幅率等を求める事とする。

$$\begin{aligned} \tilde{z}_b &= -\hat{z}_b \cos(\ell \tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \\ (\tilde{h}, \tilde{u}, \tilde{q}_{bx}) &= (\hat{h}, \hat{u}, \hat{q}_{bx}) \cos(\ell \tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \\ (\tilde{v}, \tilde{q}_{by}) &= (\hat{v}, \hat{q}_{by}) \sin(\ell \tilde{y}) \exp\{ik(\tilde{x} - c\tilde{t})\} \\ c &= C_r + iC_i \quad k = \frac{2\pi h_0}{\lambda} \quad l = \frac{2\pi m h_0}{B} \quad (m=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

ここで、 C_r , k は波速および波高の増幅率、 l は横断方向の波数、 λ は縦断方向波長、 B は流路幅である。

(9)～(15)式に上述の調和関数をそれぞれ代入すると、

$$ik\hat{h} + ik\hat{u} + \hat{v} = 0 \quad \dots (16)$$

$$2Fr_0^2 \left[ik + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa k \tan \theta}{\sqrt{a} \tau_0^* R}} (E_3 + iE_4) \right] \hat{u} + Fr_0^2 l \hat{v} + \left(ik - \frac{1}{a} + ikFr_0^2 - \frac{1}{3} ik^3 Fr_0^2 \right) \hat{h} + \left(ik - \frac{1}{2} ik^3 Fr_0^2 \right) \hat{z}_b = 0 \dots (17)$$

$$Fr_0^2 \left(ik + \frac{1}{a} \right) \hat{v} + \left(\frac{1}{3} k^2 Fr_0^2 - 1 \right) l \hat{h} + \left(\frac{1}{2} k^2 Fr_0^2 - 1 \right) l \hat{z}_b = 0 \dots (18)$$

$$\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\kappa k}{R \tau_0^* \tan \theta}} Fr_0^2 \cos \theta (E_3 + iE_4) \cos \phi \hat{u} - \frac{ik}{\mu_f} \hat{z}_b - q_{b0}^* \frac{\mu_e \cos \theta}{\sqrt{a} \tau_0^{\frac{3}{2}}} \hat{q}_{bx} = 0 \dots (19)$$

$$\hat{v} + \frac{l}{\mu_e} \sqrt{\frac{\tau_{eo}^* \cos \theta}{\tau_0^* b}} \hat{z}_b - \left(1 + \sqrt{\frac{\tau_{eo}^* b \cos \theta}{\tau_0^*}} \right)^{-1} \hat{q}_{by} = 0 \dots (20)$$

$$-(1-n) \frac{Fr_0 R \sqrt{\cos \theta}}{q_{b0}^*} \left(\frac{\tau_0^*}{\tan \theta} \right)^{\frac{3}{2}} ikc \hat{z}_b + ik \hat{q}_{bx} + l \hat{q}_{by} = 0 \dots (21)$$

となり、これらの方程式を6行6列の行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{63} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \\ \hat{z}_b \\ \hat{q}_{bx} \\ \hat{q}_{by} \end{pmatrix} = 0 \dots (22)$$

と表すことが出来る。 a_{ij} は、(16)～(21)式の各振幅にかかる係数である。この方程式の振幅に0以外の解が存在するためには、そのディターミナントが0であることが必要条件である。したがって、(23)式の様に置き換えて表すこととする。ただし、(22)式の6次正方行列をBとする。

$$\det(B) = c(G_1 + iG_2) + (G_3 + iG_4) \dots (23)$$

ここで、 G_1, G_2, G_3, G_4 は a_{ij} の関数。上式より、最終的にCi, Crは(24), (25)式となる。

$$\begin{cases} C_r = -\frac{G_1 G_3 + G_2 G_4}{G_1^2 + G_1^2} \\ C_i = \frac{G_2 G_3 - G_1 G_4}{G_1^2 + G_1^2} \end{cases} \dots (24, 25)$$

これより、河床波高の増幅率および位相速度の性質を議論することが出来る。上式には、無次元底面せん断応力・河床勾配の平均値である τ_0^* 、 $\tan \theta$ がパラメータとして入っているが、これらのパラメータは、D, h_0, θ によって変化することも可能である。

kCi の値は波高の増幅率を意味しており、その値が正であるなら河床波は発達し、負であれば減衰する。ここで波数kと kCi の関係をFig. 2に示す。同図中のパラメータには、過去に試みた実験値が用いられている。上から順にRun4, Run11, Run9について見たものであり、図の左側は $m=1$ の三次元波に対する結果を、右側は、 $m=0$ 、即ち二次元波に対する結果を表している。これらの実験において、Run4はステッププールが発生し、Run11はステッププールは発生せず二次元波が僅かに残った状態、Run9では河床材料が動かず河床波が発生しない状況であった。平均流速公式には、山地河川でよく適合する石川式を用い、パラメータとした無次元掃流力、河床勾配の平均値は図中に記入した。

Run4では、三次元波の成長率卓越部が正となりステッププールが発達する条件にあることが確認でき、実験結果と一致する。Run11は三次元波の成長率卓越部が負となり、三次元波非発生条件を満たしている。加

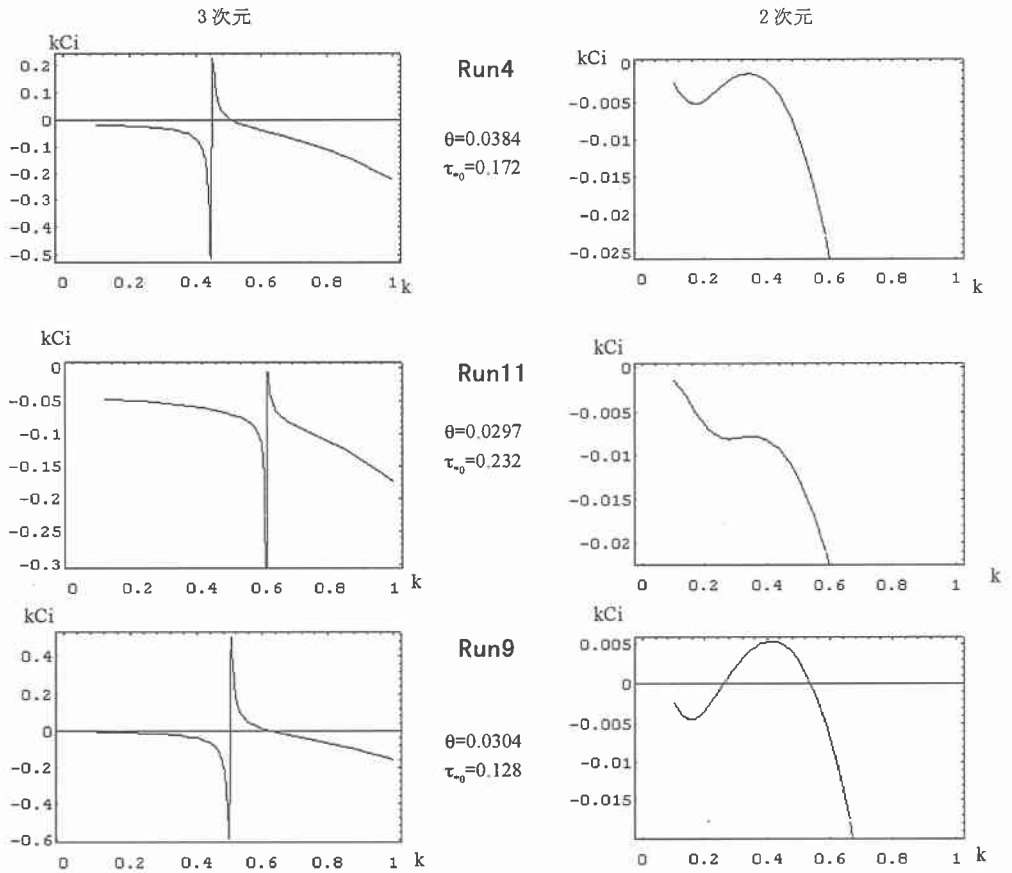


Fig. 2

えて二次元波に関する成長率は、そのピーク部において緩やかな凸部を描くのみで負の値にあり、実験結果にほぼそうものとなっている。Run9 は理論値において二次元波の成長を示す唯一のケースであるが、三次元波も成長を見せる結果となっている。しかし、このケースは、前述のように河床材料の動きがほとんど計測されず、河床波の成長が見られなかった。

以上のように、本理論は全ての実験結果を説明できる状態ではないが、実験の現象をよく表現していることとして、三次元波の成長率がある点を境界として急激に変化することがあげられよう。実験において三次元波はその成長のピークを迎えると

ほぼ同時に崩壊し、崩壊後にまた成長する現象を繰り返す。これは Fig. 2 の三次波の結果が、非常にせまい不安定領域をもっていることに対応しているものと考えられ、発生した河床波の波長が微小な変化をすることにより、成長率が図中の安定状態や不安定状態を行き来するためだと考えられる。

また、Fig. 3 はステッププールが発生した Run4 の $m=1$ の場合における波数 k と河床波の移動速度 Cr との関係を表したグラフである。このグラフより、ステッププールの移動速度は非常に微小であることが判る。実

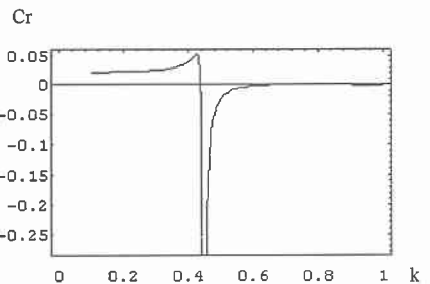


Fig. 3

現象でもステッププールは停止しているものと推測される。これは実験でも観察される現象で、発生したステッププールはその発生場所からほとんど移動することなく崩壊している。

4. 結論

(1) 非静水圧の浅水流モデルに水面波に伴う底面せん断応力分布の位相ずれ効果を導入することで、従来、浅水流モデルでは導き得なかった小規模河床波の発生条件を求めることが出来た。

(2) 三次元波の成長・崩壊条件が非常に不安定であるという実験結果を理論で表現することが出来、その移動速度は非常に微小である事がわかった。

(3) 理論が二次元波の成長を表現できないのは、二次元河床によって誘起された強制水面波がもたらす底面せん断応力分布の位相ずれの効果が、十分に考慮されていないためだと考えられる。また、二次元波の成長に比して、三次元波の成長率がかなり大きく、理論では二次元波の成長を超えて三次元波の方が卓越波長となる結果になる。しかし、実験の示すところでは二次元波の成長が早く、三次元波はその流下方向波長が先行する二次元波の波長と同調したときのみ発達している。これらは現象の本質にかかわる非常に重要な問題であり、さらなる検討が必要である。

5. 参考文献

- 1) 沢田豊明・芦田和男：山地溪流における流路形態と土砂流出、第33回水理講演会論文集、1989、pp. 373-378.
- 2) 長谷川和義・上林悟：溪流における淵・瀬（ステップ・プール）の形成機構とその設計指針、水工学論文集第40巻、1996、pp. 893-900.
- 3) 長谷川和義・上林悟：ステッププールの部分発生の要因とその発生領域、土木学会北海道支部論文報告集第52号（B）、1996、pp. 184-187.
- 4) 細田尚・余越正一郎・岩佐義朗：三次元波状路床上の流れに関する解析、広島大学工学部研究報告 32、1（1993）.
- 5) AGNES KOVACS and GARY PARKER, A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, J.Fluid Mech. (1994), vol. 267, pp. 153-183.
- 6) Hitoshi Tanaka and Nobuo Shuto, FRICTION COEFFICIENT FOR A WAVE-CURRENT COEXISTENT SYSTEM, Coastal Engineering in Japan, Vol. 24, 1981, pp. 105-128.