

I-70

薄肉変断面部材のモデル化と固有振動数

北海道大学工学部 フェロー 林川 俊郎
 北海道大学工学部 学 生 員 武村 信也
 北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之
 北海道大学工学部 フェロー 佐藤 浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、構造物に作用する外力の性質と、構造物自体の固有振動性状に依るところが大きい。そのため、構造物の動的応答を調べるためには、固有振動数ならびに固有振動モードを良い精度で求めることが重要である。筆者らは、そりねじりを考慮した立体骨組モデルの固有振動数の精度について検討してきた^{1,2}。しかし、部材断面の図心とせん断中心が異なる場合や、隣接要素間でせん断中心軸が不連続になる部材での曲げとねじりの連成振動問題が残されていた。一般に構造物の固有振動解析では、部材要素を2軸対称の棒部材にモデル化するため、要素断面の図心とせん断中心は一致し、曲げ振動とねじり振動は連成しない。しかし、実際の構造部材には薄肉断面が用いられることが多く、1軸対称断面あるいは2軸非対称断面部材の場合には、その図心とせん断中心が異なることに伴い曲げ振動とねじり振動が連成する。また、変断面部材の固有振動解析では、一般的に変断面部材をいくつかの直線部材に分割して重ね合わせる方法が用いられるが、隣り合う要素間で部材の図心軸あるいはせん断中心軸が不連続になる場合があり、各要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを単純に重ね合わせることができない。こういった薄肉変断面部材は、要素両端面上の任意の点に関する剛性マトリックスおよび質量マトリックスを用意することによって、隣接要素間における共通の節点を解析点に選ぶことにより、解析が可能となる。薄肉変断面部材の解析例としては、文献3)にテーパーを有するI形はりの横倒れ座屈の解析例が示されている。また、藤谷らはテーパーを有するI形はりや薄肉正方形断面はりの固有振動解析を行っている⁴。しかし、より具体的な薄肉変断面部材による曲げとねじりの連成振動についての解析例は数少ないように思われる。

そこで本研究では、薄肉変断面部材の剛性マトリックスと質量マトリックスを誘導するための変換マトリックスを導き、曲げとねじり振動が連成する固有振動解析を行うとともに、得られた固有振動数の精度および振動特性について検討するものである。

2. 立体薄肉変断面部材のモデル化

図-1に示すような薄肉断面部材において、断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ での変位は、断面不変の仮定より、せん断中心 $S(y_s, z_s)$ の変位を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} u_p(x) &= u_s(x) - y_p \cdot v'_s(x) - z_p \cdot w'_s(x) \\ &\quad + \{ \omega_n(y_p, z_p) - y_p \cdot z_s + y_s \cdot z_p \} \cdot \theta'(x) \\ v_p(x) &= v_s(x) - (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \\ w_p(x) &= w_s(x) + (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $u_p(x), v_p(x), w_p(x)$ は、点 P での x, y, z 軸方向変位、 $u_s(x), v_s(x), w_s(x)$ はせん断中心での x, y, z 軸方向変位、 $\theta(x)$ は x 軸まわりの回転角、 $\omega_n(y_p, z_p)$ は規準化されたサンブナンのゆがみ関数、 $(\cdot)' = d/dx$ である。

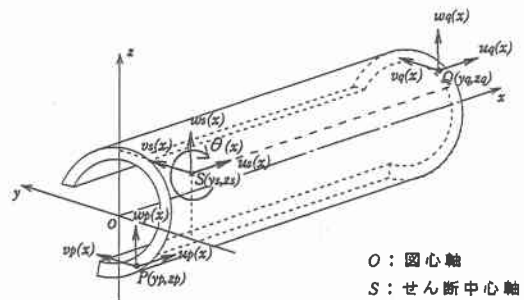


図-1 薄肉断面要素

Modeling of Thin-Walled Beam Segments with Variable Sections and Natural Frequencies.
 by Toshiro HAYASHIKAWA, Shinya TAKEMURA, Hideyuki HIRASAWA, and Koichi SATO.

式(1)より、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_s(x) &= u_p(x) + y_p \cdot v'_p(x) + z_p \cdot w'_p(x) - \theta'(x) \cdot \omega_n(y_p, z_p) \\ v_s(x) &= v_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \\ w_s(x) &= w_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \\ v'_s(x) &= v'_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta'(x) \\ w'_s(x) &= w'_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta'(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

要素左端の任意点を $P(y_p, z_p)$ 、右端の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とする。点 Q についても式(2)と同様の関係式を導くことができ、要素両端面上のせん断中心の変位は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{Bmatrix} ds_L \\ ds_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_p] & 0 \\ 0 & [T_q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\{ds_L\}^T = [u_{sL}, v_{sL}, w_{sL}, \theta_{xsL}, \theta_{ysL}, \theta_{zsL}, \theta_{wsL}]$ 、 $\{ds_R\}^T = [u_{sR}, v_{sR}, w_{sR}, \theta_{xsR}, \theta_{ysR}, \theta_{zsR}, \theta_{wsR}]$
 $\{dp\}^T = [u_p, v_p, w_p, \theta_{xp}, \theta_{yp}, \theta_{zp}, \theta_{wp}]$ 、 $\{dq\}^T = [u_q, v_q, w_q, \theta_{xq}, \theta_{yq}, \theta_{zq}, \theta_{wq}]$

$$[T_p] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad [T_q] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり、 θ_y 、 θ_z 、 θ_w はそれぞれ y 軸まわりのたわみ角、 z 軸まわりのたわみ角、およびねじり率を表している。次に、式(3)を $\{ds\} = [T] \{dpq\}$ と表せば、変換マトリックス $[T]$ を用いてせん断中心位置における要素剛性マトリックス $[K_s]$ を、次式のように断面上の任意点における剛性マトリックス $[K_{pq}]$ に変換することができる。

$$[K_{pq}] = [T]^T [K_s] [T] \quad (5)$$

要素質量マトリックスについても同様の方法により任意点における要素質量マトリックスを導くことができる。

$$[M_{pq}] = [T]^T [M_s] [T] \quad (6)$$

本研究では、変断面部材により構成された構造物を直線要素の集合体にモデル化して固有振動解析を行うことにする。隣接する要素間でのせん断中心が異なる場合、各要素の剛性マトリックスや質量マトリックスをそのまま重ね合わせることができない。そこで、式(5)と式(6)を用いて要素境界面上で同一の解析点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを計算しておけば、構造物全体について重ね合わせを行うことができる。離散座標系である集中質量法と整合質量法では、重ね合わせにより組み立てられた構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスを K 、 M とすると、任意点を解析点とする固有振動解析のための振動数方程式は次のような固有値問題に帰着される。

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \quad (7)$$

ここで、 ω は固有円振動数である。上式の固有値問題は Householder 法を用いて固有値を求める。また、分布座標系で表示される連続質量法の場合、固有円振動数 ω を含む要素固有剛性マトリックスを式(5)に準じて変換すると、最終的に次の振動数方程式を解くことになる。

$$\det |K(\omega)| = 0 \quad (8)$$

$K(\omega)$ は、構造物全体の固有剛性マトリックスである。式(8)は、Regula-Falsi 法により解を求めた。

3.数値計算結果

以下に示す数値計算例では、離散座標系の手法である集中質量法(Lumped Mass Method)と整合質量法(Consistent Mass Method)、分布座標系の手法である連続質量法(Continuous Mass Method)の3通りの方法で解析を行った。連続質量法では、桁の自由振動を支配する基礎微分方程式の一般解から導かれる固有剛性マトリックスを用いており、厳密解が得られる。本研究では、等断面桁と変断面桁を計算モデルとし、厳密解に対する離散座標系の解の精度およびモードの連成状態について調べた。

3 - 1.等断面桁

図-2に示す断面形状を有する直線桁について数値計算を行った。断面諸元は表-1に示すものを用い、支間長は31.5m、境界条件は両端単純支持である。要素分割数は6分割、8分割、10分割の3通りとし、図心とせん断中心との偏心量を考慮しない場合と考慮した場合について数値計算を行った。表-2および表-3は、計算された固有振動数ならびに連続質量法による厳密解との比を示したものである。表-2に示すように、偏心量を考慮しない場合の固有振動数の値は、整合質量法では厳密解より大きく、集中質量法では小さく計算される。なお、偏心量を考慮した場合、考慮しない場合とも整合質量法の方が集中質量法よりも精度良く固有振動数を計算している。しかし、偏心量を考慮した場合、整合質量法により求められた固有振動数が、厳密解よりも小さくなる場合がある。これは、ねじり振動と他の曲げ振動との連成効果によるものと考えられる。そこで、曲げ振動とねじり振動との連成効果を表すパラメーターとして、モード連成比を考えた。ここで示すモード連成比とは、連成状態を判定するために1節点7自由度を有する固有振動モードの中でそれぞれの変位が全体に占める割合を数値的に表したものである。例えば、i次モードのx軸方向変位のモード連成比は次式で表される。

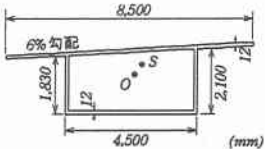


図-2 断面形状

表-1 断面諸元

A (m ²)	2.03 × 10 ⁻¹
I _y (m ⁴)	1.58 × 10 ⁻¹
I _z (m ⁴)	9.45 × 10 ⁻¹
K (m ⁴)	3.51 × 10 ⁻¹
C _w (m ⁶)	6.49 × 10 ⁻²
w (t/m)	1.60 × 10 ⁶

$$\phi_{xi} = \frac{\sum_{j=1}^{nodt} \sqrt{u_{ij}^2}}{\sum_{j=1}^{nodt} (\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\theta_{xij}^2} + \sqrt{\theta_{yij}^2} + \sqrt{\theta_{zij}^2} + \sqrt{\theta_{w_{ij}}^2})} \times 100(\%) \tag{9}$$

表-4と表-5には、上式(9)により計算したモード連成比を示す。なお、記号V、H、T、Lはそれぞれ鉛直振動、水平振動、ねじり振動および縦振動の振動モードを表している。これより、偏心を考慮しない場合は曲げとねじりは連成せず、独立したモードであるのに対し、偏心を考慮した場合には複雑に連成したモードが現れている。特に、偏心を考慮した場合のねじり振動には、他の曲げ振動や縦振動と連成していることが理解できる。

表-2 直線桁の固有振動数 (偏心考慮せず)

Mode order	Lumped Mass Method			Consistent Mass Method			Continuous Mass Method
	N=6	N=8	N=10	N=6	N=8	N=10	
1	7.07 0.989	7.11 0.994	7.12 0.998	7.15 1.000	7.15 1.000	7.15 1.000	7.15
2	17.32 0.989	17.41 0.994	17.45 0.998	17.52 1.000	17.52 1.000	17.52 1.000	17.52
3	27.37 0.957	27.90 0.975	28.15 0.984	28.60 1.000	28.60 1.000	28.60 1.000	28.60
4	28.27 0.988	28.42 0.993	28.48 0.995	28.64 1.001	28.62 1.000	28.62 1.000	28.61
5	55.03 0.955	56.14 0.975	56.66 0.994	57.60 1.000	57.60 1.000	57.60 1.000	57.60
6	58.39 0.907	60.87 0.946	62.09 0.964	64.63 1.004	64.46 1.001	64.41 1.001	64.38
7	67.02 0.956	68.33 0.975	68.95 0.984	70.13 1.001	70.10 1.000	70.09 1.000	70.08
8	78.87 0.969	80.85 0.994	81.04 0.998	82.31 1.011	81.90 1.008	81.71 1.004	81.37
9	80.45 0.920	82.52 0.944	84.25 0.984	87.44 1.000	87.42 1.000	87.41 1.000	87.41
10	96.75 0.845	103.81 0.907	107.41 0.938	115.80 1.012	114.90 1.004	114.64 1.002	114.45

表-3 直線桁の固有振動数 (偏心考慮)

Mode order	Lumped Mass Method			Consistent Mass Method			Continuous Mass Method
	N=6	N=8	N=10	N=6	N=8	N=10	
1	8.49 0.994	8.52 0.997	8.52 0.998	8.59 1.008	8.57 1.003	8.56 1.002	8.54
2	17.32 0.989	17.41 0.994	17.45 0.998	17.52 1.000	17.52 1.000	17.52 1.000	17.52
3	26.72 0.859	27.20 0.977	27.43 0.985	27.89 1.001	27.87 1.001	27.86 1.000	27.85
4	28.27 0.982	28.41 0.986	28.47 0.989	28.59 0.993	28.59 0.993	28.59 0.993	28.80
5	52.95 0.957	53.91 0.974	54.33 0.982	55.34 1.000	55.22 0.998	55.15 0.997	55.33
6	59.24 0.909	61.68 0.947	62.88 0.965	65.42 1.004	65.23 1.002	65.18 1.001	65.13
7	64.95 0.979	65.78 0.992	65.99 0.995	68.38 1.031	67.47 1.017	66.98 1.010	66.34
8	67.05 0.957	68.35 0.975	68.97 0.984	70.18 1.001	70.13 1.000	70.11 1.000	70.10
9	78.35 0.898	81.88 0.939	83.56 0.958	86.68 0.993	86.65 0.993	86.64 0.993	87.24
10	97.35 0.837	105.02 0.903	108.80 0.938	116.88 1.005	116.33 1.000	116.16 0.999	116.29

表-4 モード達成比 (等断面桁、偏心考慮せず)

Mode order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
1 V1	0.0	0.0	90.9	0.0	9.1	0.0	0.0	100
2 H1	0.0	90.1	0.0	0.0	0.0	9.9	0.0	100
3 T1	0.0	0.0	0.0	90.1	0.0	0.0	9.9	100
4 V2	0.0	0.0	83.4	0.0	16.6	0.0	0.0	100
5 T2	0.0	0.0	0.0	82.0	0.0	0.0	18.0	100
6 V3	0.0	0.0	76.9	0.0	23.1	0.0	0.0	100
7 H2	0.0	82.0	0.0	0.0	0.0	18.0	0.0	100
8 L1	100.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	100
9 T3	0.0	0.0	0.0	75.3	0.0	0.0	24.7	100
10 V4	0.0	0.0	71.5	0.0	28.5	0.0	0.0	100

表-5 モード達成比 (等断面桁、偏心考慮)

Mode order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
1 V1	2.6	0.5	86.7	0.9	8.7	0.1	0.5	100
2 H1	0.1	89.5	0.4	0.1	0.0	9.8	0.0	100
3 V2	20.1	0.1	65.8	0.4	13.1	0.1	0.4	100
4 T1	3.1	10.9	16.5	60.7	1.2	1.2	6.4	100
5 T2	39.9	6.4	6.2	32.8	4.1	1.7	8.9	100
6 V3	17.5	0.1	62.3	0.6	18.7	0.1	0.6	100
7 L1	52.3	3.3	19.9	12.9	5.1	1.5	5.1	100
8 H2	5.4	74.1	2.1	1.1	0.6	16.2	0.6	100
9 T3	23.5	7.4	8.3	41.8	3.0	2.4	13.8	100
10 V4	7.4	2.9	44.2	16.1	20.5	1.3	7.6	100

3-2. 変断面桁

図-2に示した断面形状を有し、図-3のように桁高が2次放物線的に変化していく変断面桁の数値計算を行った。支間中央点での桁高は端部の桁高の半分とし、支間長と境界条件は等断面桁と同じである。計算にあたっては、変断面桁を10個の直線要素の集合体にモデル化した。表-6に固有振動数とその厳密解に対する比を、表-7には図心とせん断中心との偏心を考慮した場合のモード達成比を示す。等断面桁の場合と同様に、整合質量法でのねじり振動が達成するモードの固有振動数が、連続質量法による厳密解よりも小さく計算されている。また、表-7のモード達成比から、高次モードになるにつれて複雑な達成状態を示していることがわかる。

4. あとがき

本研究では、非対称断面を有する等断面桁と変断面桁での曲げとねじりの達成する固有振動解析を行なった。図心とせん断中心との偏心量を考慮した場合、整合質量法で計算されたねじり振動の達成したモードでは、厳密解よりも固有振動数の値が小さくなる傾向が見られた。また、モード達成比を示すことにより、複雑に達成したモードで支配的な変位を判定することができ、高次モードになるほど複雑な達成状態になることが確認できた。

【参考文献】

- 1) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一：曲げねじりを考慮した立体骨組モデルの固有周期と精度について、土木学会北海道支部論文報告集、第52号(A)、1996年2月、pp.366-369.
- 2) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一：そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動数の精度について、土木学会第51回年次学術講演会講演概要集、第1部(B)、1996年9月、pp.140-141.
- 3) 川井忠彦：座屈問題解析、培風館、1974年10月、pp.114-119.
- 4) 菅誠司・藤谷義信：有限要素法による変断面はりの固有振動解析、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第11巻、1987年7月、pp.79-84.

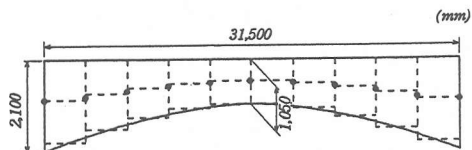


図-3 変断面桁モデル

表-6 変断面桁の固有振動数一覧

Mode order	without eccentricity			with eccentricity		
	Lumped	Consistent	Continuous	Lumped	Consistent	Continuous
1	4.09	4.11	4.11	5.96	5.99	5.97
	0.995	1.000		0.999	1.003	
2	17.34	17.43	17.43	17.32	17.40	17.34
	0.995	1.000		0.999	1.004	
3	18.07	18.38	18.38	17.76	18.06	18.06
	0.983	1.000		0.984	1.000	
4	24.60	24.73	24.72	24.49	24.63	24.85
	0.995	1.000		0.985	0.991	
5	40.74	42.32	42.30	41.95	43.56	43.52
	0.963	1.001		0.964	1.001	
6	44.59	45.42	45.41	43.98	44.79	45.03
	0.982	1.000		0.977	0.995	
7	65.20	67.85	67.83	59.27	60.84	60.29
	0.981	1.000		0.983	1.009	
8	68.60	69.77	69.77	65.10	67.73	68.10
	0.983	1.000		0.956	0.995	
9	70.85	75.79	75.65	68.30	69.51	69.65
	0.937	1.002		0.981	0.998	
10	83.03	83.75	83.39	77.14	81.87	81.50
	0.996	1.004		0.947	1.005	

表-7 モード達成比 (変断面桁、偏心考慮)

Mode order	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	ϕ_{θ_x}	ϕ_{θ_y}	ϕ_{θ_z}	ϕ_{θ_w}	Total
1 V1	1.6	0.2	88.2	0.5	8.9	0.1	0.4	100
2 H1	0.3	88.7	0.3	0.7	0.0	9.7	0.3	100
3 V2	14.4	0.0	71.0	0.1	14.3	0.0	0.1	100
4 T1	3.9	5.2	15.0	66.0	1.3	1.6	7.1	100
5 V3	11.2	0.1	66.4	0.9	20.3	0.2	0.8	100
6 T2	20.2	8.0	6.5	48.6	3.4	2.5	10.8	100
7 L1	46.6	2.4	29.3	5.7	10.7	0.8	4.4	100
8 T3	14.6	7.5	11.5	46.4	2.4	2.8	14.8	100
9 H2	1.6	74.0	3.1	2.3	1.6	16.1	1.2	100
10 V4	21.4	3.1	42.3	8.0	18.5	1.5	5.2	100