

I-69 高欄の影響を考慮した橋のねじり振動について

新構造	正員	和田 隆宏
北海道土木設計	正員	青木 雅人
北海道大学工学部	フェロー	渡辺 昇

1. はじめに

北海道利尻島の一般道道東利尻利尻自転車道線に架かる湾内大橋は3径間連続鋼床版箱桁橋(59.3m+73.0m+59.3m)であるが、利尻島は日本海の北の孤島で風雪が激しく、耐風設計の必要から風洞実験によりその断面形状を比較検討した結果、下フランジに丸みのある三角形箱断面を採用した。

本橋は手延式送り出し工法により架設されたが、高欄立てこみ後、アスハルト舗装打設前の1995年12月6日と、アスハルト舗装打設後の1995年12月9日に、現地の実橋上において本橋の鉛直曲げ振動、水平曲げ振動、ねじり振動の三種の振動測定を行った。

その詳細については、平成7年度土木学会北海道支部論文報告集第1部門「湾内大橋の実橋振動測定について」に発表したが、今回は、特に、ねじり振動の解析理論に的をしぼって発表する。

2. 桁のねじり振動の理論と解

桁の自重によるねじり振動の微分方程式は次式である

$$GJ_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1) \quad \text{ただし、} \beta = \frac{\gamma \cdot I_p}{g}$$

$\varphi(x, t) = \theta(x) \cdot T(t)$ とおけば、

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \theta}{dx^2} \cdot T, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \theta \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} \quad \text{だから、式(1)は、}$$

$$GJ_T \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} \cdot T - \beta \cdot \theta \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{d^2 \theta}{dx^2}}{\theta} - \frac{\beta}{GJ_T} \frac{\frac{d^2 T}{dt^2}}{T} = 0$$

$$\frac{\frac{d^2 T}{dt^2}}{T} = \frac{GJ_T}{\beta} \frac{\frac{d^2 \theta}{dx^2}}{\theta} = -\omega^2 \quad \text{とおき、} \quad \frac{GJ_T}{\beta} = \lambda^2 \quad (2) \quad \text{とおけば、}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\omega^2}{\lambda^2} \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} T(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ \theta(x) &= C \cos \frac{\omega}{\lambda} x + D \sin \frac{\omega}{\lambda} x \end{aligned} \right\}$$

結局、式(1)の解は次式となる

$$\varphi(x, t) = (C \cos \frac{\omega}{\lambda} x + D \sin \frac{\omega}{\lambda} x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (3)$$

Torsional Vibration Analysis of Bridge with Handrail and Pavement
by Takahiro WADA, Masato AOKI and Noboru WATANABE.

支間 l の桁の両支点のねじり角が拘束されている場合は、 $\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0$ だから、

$$\left. \begin{array}{l} C = 0, \\ C \cos \frac{\omega}{\lambda} l + D \sin \frac{\omega}{\lambda} l = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \sin \frac{\omega}{\lambda} l = 0 \quad (\text{固有値方程式})$$

$$\therefore \frac{\omega}{\lambda} l = k\pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

式(2)より次式の固有円振動数 $\omega_k (\text{sec}^{-1})$ をうる

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{\gamma \cdot I_p}} = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

$$\text{固有振動数 } f_k (H_z) \text{ は、 } f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (5) \quad \text{固有周期 } T_k (\text{sec}) \text{ は、 } T_k = \frac{1}{f_k} \quad (6)$$

ここで、 φ : 桁の x におけるねじり角(rad)、 G : 桁のせん断弾性率(鋼では $0.81 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)、
 J_T : 桁の純ねじり抵抗係数(cm^4)、 γ : 桁の材料の比重(鋼では $7.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 、アスハルトでは $2.30 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$)、 g : 引力の加速度 (980 cm/sec^2)、

$$I_p: \text{重心に関する極断面2次モーメント} = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z \quad (\text{cm}^4) \quad (7)$$

r : 重心より要素 dA への距離(cm)、 A : 全断面積(cm^2)、 dA : 断面要素(cm^2)、

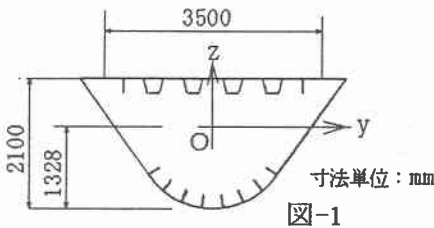
$$M_p: \text{質量極2次モーメント} = \frac{\gamma \cdot I_p}{g} = \frac{\gamma}{g} (I_y + I_z) \quad (\text{kg} \cdot \text{sec}^2) \quad (8)$$

I_y : y 軸に関する断面2次モーメント(cm^4)、 I_z : z 軸に関する断面2次モーメント(cm^4)。

湾内大橋は箱断面であるためそりねじりの影響が無視できるので、式(1)の基本微分方程式を用いることができる。また、湾内大橋は3径間連続桁であるが、中間橋脚部の支承は2点支持形式のためねじり角が拘束されているから、各支間毎の単径間桁のねじり振動解析が有効であり、式(4)の解をそのまま用いることができる。

3. ねじり振動の計算

3.1 主構造のみの場合



$$I_y = 1.17 \times 10^7 \text{ cm}^4 \quad (\text{地覆・高欄を含まず})$$

$$I_z = 2.68 \times 10^7 \text{ cm}^4 \quad (\text{地覆・高欄を含まず})$$

$$J_T = 0.98 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

図-1

3.1.1 $l = 7300 \text{ cm}$ の場合

$$M_p = \frac{\gamma}{g} (I_y + I_z) = \frac{7.85 \times 10^{-3}}{980} (1.17 \times 10^7 + 2.68 \times 10^7) = 308.4 \quad (\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{7300} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{308.4}} = 69.0 \quad (\text{sec}^{-1}), \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{69.0}{2 \times 3.14} = 11.0 \quad (H_z)$$

3.1.2 $l=5930\text{cm}$ の場合

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{5930} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{308.4}} = 84.7 (\text{sec}^{-1}), f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{84.7}{2 \times 3.14} = 13.5 (H_z)$$

3.2 主構造⊕高欄 の場合

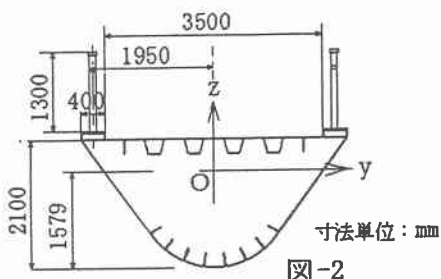


図-2

全鋼重 (主構造・地覆・高欄)

$$W_s = 357.0 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$I_y = 1.33 \times 10^7 \text{ cm}^4 \text{ (地覆・高欄を含む)}$$

$$I_z = 2.73 \times 10^7 \text{ cm}^4 \text{ (地覆・高欄を含む)}$$

$$J_T = 0.98 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

3.2.1 $l=7300\text{cm}$ の場合

$$M_p = \frac{\gamma}{g} (I_y + I_z) = \frac{7.85 \times 10^{-3}}{980} (1.33 \times 10^7 + 2.73 \times 10^7) = 325.2 (\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{7300} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{325.2}} = 67.2 (\text{sec}^{-1}), f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{67.2}{2 \times 3.14} = 10.7 (H_z)$$

3.2.2 $l=5930\text{cm}$ の場合

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{5930} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{325.2}} = 82.7 (\text{sec}^{-1}), f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{82.7}{2 \times 3.14} = 13.2 (H_z)$$

3.3 主構造⊕高欄⊕舗装 の場合

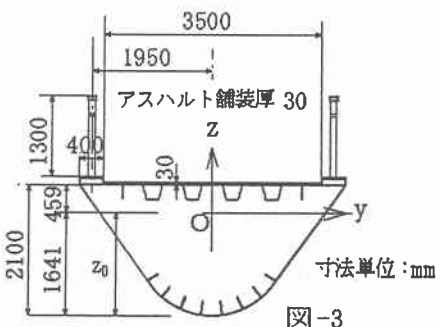


図-3

全鋼重 (主構造・地覆・高欄)

$$W_s = 357.0 \times 10^3 \text{ kg}$$

舗装重量

$$W_A = 46.6 \times 10^3 \text{ kg}$$

図-3 における下フランジから重心までの鉛直距離 z_0 は、図-2 と図-3 とを参照しながら、

$$z_0 = \frac{357.0 \times 10^3 \times 157.9 + 46.6 \times 10^3 \times (210.0 + 1.5)}{357.0 \times 10^3 + 46.6 \times 10^3} = 164.1 \text{ cm} \text{ となる。}$$

図-2 の重心が図-3 の重心に移ることによって、図-2 の I_y, I_z は、図-3 の I_{sy}, I_{sz} に、

次のように変わる (ここで、橋長 = $7300 + 5930 \times 2 = 19160 \text{ cm}$)

$$I_{sy} = \frac{357.0 \times 10^3}{19160 \times 7.85 \times 10^{-3}} \times (164.1 - 157.9)^2 + 1.33 \times 10^7 = 0.01 \times 10^7 + 1.33 \times 10^7$$

$$= 1.34 \times 10^7 (\text{cm}^4)$$

$$I_{sz} = 2.73 \times 10^7 (\text{cm}^4)$$

図-3 におけるアスハルト舗装部分の断面2次モーメントは、

$$I_{Ay} = 350 \times 3 \times (45.9 + 1.5)^2 + \frac{1}{12} \times 350 \times 3^3 = 0.24 \times 10^7 (\text{cm}^4)$$

$$I_{Az} = \frac{1}{12} \times 3 \times 350^3 = 1.07 \times 10^7 (\text{cm}^4)$$

3.3.1 $l = 7300 \text{cm}$ の場合

$$\text{鋼部分の } M_p = \frac{\gamma_s}{g} (I_{sy} + I_{sz}) = \frac{7.85 \times 10^{-3}}{980} (1.34 \times 10^7 + 2.73 \times 10^7) = 326.0 (\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$$

$$\text{舗装部分の } M_p = \frac{\gamma_A}{g} (I_{Ay} + I_{Az}) = \frac{2.3 \times 10^{-3}}{980} (0.24 \times 10^7 + 1.07 \times 10^7) = 30.7 (\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$$

$$\text{全部分の } M_p = 326.0 + 30.7 = 356.7 (\text{kg} \cdot \text{sec}^2)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{7300} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{356.7}} = 64.1 (\text{sec}^{-1}), \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{64.1}{2 \times 3.14} = 10.2 (H_z)$$

3.3.2 $l = 5930 \text{cm}$ の場合

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{GJ_T}{M_p}} = \frac{3.14}{5930} \sqrt{\frac{0.81 \times 10^6 \times 0.98 \times 10^7}{356.7}} = 78.9 (\text{sec}^{-1}), \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{78.9}{2 \times 3.14} = 12.5 (H_z)$$

4. 実橋の振動測定のためのフーリエスペクトル図

湾内大橋の実橋のねじり振動測定のねじり振動数のフーリエスペクトル図を、図-4 ($l = 7300 \text{cm}$ の場合) と図-5 ($l = 5930 \text{cm}$ の場合) に示す。

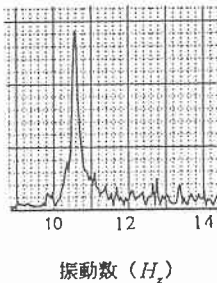


図-4

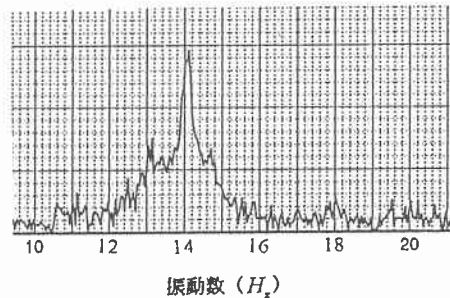


図-5

5. まとめ

ねじり振動の計算値と実橋の測定値は大凡よく合致していたが、 $l = 5930 \text{cm}$ の側径間の場合は、複雑な振動が共存している。高欄の存在がねじりの振動数に与える影響は 2.5 % 程度であり、アスハルト舗装の存在がねじりの振動数に与える影響は 5.3 % 程度である。